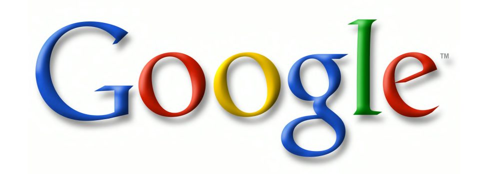




S. Günther.



VORLESUNGEN

ÜBER

DIE IM UMGEKEHRTEN VERHÄLTNISS DES QUADRATS DER ENTFERNUNG WIRKENDEN KRÄFTE

VON

P. G. LEJEUNE-DIRICHLET.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. F. GRUBE,
ORD. LEHRER AN DER K. DOMSCHULE ZU SCHLESWIG.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1876.

Vorwort des Herausgebers.

Dieser Veröffentlichung der *Dirichlet*'schen Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte, „von denen mit Recht gesagt worden ist, dass sie das beste Lehrbuch über jenen Gegenstand bilden würden" (*Heine*, Handbuch der Kugelfunctionen. 1861), liegt ein von mir, dem es vergönnt war, noch sämmtliche Vorlesungen *Dirichlet*'s zu hören, im Wintersemester 1856—57 geführtes Heft zu Grunde. Ich habe es mir zur Aufgabe gemacht, die genannten Vorlesungen möglichst getreu, ohne irgend welche Zusätze oder Kürzungen oder Veränderungen, wiederzugeben, und etwaige Zusätze oder Citate, die mir nothwendig oder wünschenswerth schienen, in einem Anhange gegeben. Nur einmal habe ich mir in der Anordnung des Stoffes eine Abweichung von *Dirichlet* erlaubt, indem ich den Satz über die charakteristischen Eigenschaften des Flächenpotentials, den *Dirichlet* erst zu Anfang des sechsten Abschnittes gab, an das Ende des dritten Abschnittes verlegt habe, wo er mir passender zu stehen schien. Unter den Zusätzen, die mir für ein vollständiges Lehrbuch der Potentialtheorie nothwendig schienen, ist namentlich der strenge *Dirichlet*'sche Beweis für die Entwickelbarkeit einer für alle Punkte der Kugeloberfläche gegebenen Function nach Kugelfunctionen zu nennen, der möglichst genau nach der *Dirichlet*'schen Abhandlung hierüber (im 17. Bande des

Crelle'schen Journals) mitgetheilt ist. Ich glaubte hierin ganz im Sinne *Dirichlet*'s zu handeln, der diesen Beweis nur wegen der Kürze der Zeit in jenem Wintersemester fortgelassen, aber wiederholt und nachdrücklich auf die genannte Abhandlung verwiesen hat. Ausserdem sei hier noch eine Berichtigung von *Dirichlet*'s historischer Darstellung des *Laplace*'schen Satzes über die Wirkung einer unendlich dünnen schalenförmigen Masse in der Nähe ihrer Oberfläche hervorgehoben. Die *Dirichlet*'sche Darstellung beruht offenbar auf einem Irrthum, wie die hierauf bezüglichen, ausführlich mitgetheilten Stellen aus *Poisson*'s Abhandlung über die Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche leitender Körper zur Genüge darthun werden.

Schleswig, im Mai 1876.

F. Grube.

Inhalt.

Erster Abschnitt: Das Potential einer einen Raum erfüllenden Masse.

Zweiter Abschnitt: Potential und Anziehung eines homogenen Ellipsoides.

Dritter Abschnitt: Das Flächenpotential.

Vierter Abschnitt: Potential und Kugelfunctionen.

Fünfter Abschnitt: Anwendungen der Theorie auf einige specielle Aufgaben aus der Elektricitätslehre.

Sechster Abschnitt: Allgemeine Probleme und Sätze in Bezug auf eine mit Masse belegte Fläche.

Siebenter Abschnitt: Magnetismus.

Erster Abschnitt.

Das Potential einer einen Raum erfüllenden Masse.

§. 1.

Die Untersuchungen, welche den Gegenstand dieser Vorlesungen bilden, datiren von der Entdeckung des Newton'schen Gesetzes, nach welchem zwischen je zwei Massenelementen eine Anziehung stattfindet, welche ihrer Masse proportional und dem Quadrat ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist. Nachdem dies Gesetz erkannt war, entstand das Problem, die Wirkung zweier sich gegenseitig anziehenden Massen von *endlicher* Ausdehnung auf einander zu bestimmen. Jenes Gesetz ist nämlich ein Elementargesetz, insofern es nur für zwei Massen gilt, von denen jede in einem Punkte concentrirt ist. Wenn die Massen also von endlicher Ausdehnung sind, so ist die Gesammtwirkung aus unendlich vielen Elementarwirkungen zu bestimmen. Deshalb lässt sich jenes Problem im Allgemeinen offenbar nicht lösen; nur für gewisse Formen der anziehenden Massen wird die Lösung möglich sein. Hingegen besitzt jene Wirkung gewisse allgemeine Eigenschaften, die von der grössten Bedeutung sind. Mit der Betrachtung dieser allgemeinen Eigenschaften, welche eine Folge des Newton'schen Gesetzes sind, werden wir uns zu beschäftigen haben.

Zunächst bestimmen wir die Wirkung, welche eine Masse von endlicher Ausdehnung auf *eine in einem Punkt concentrirte Masse* ausübt. Es ist aber zweckmässig, vorläufig statt der Masse von endlicher Ausdehnung ein System einzelner, von einander getrennter, materieller Punkte zu betrachten.

Drücken wir die nach dem Newton'schen Theorem zwischen zwei materiellen Punkten stattfindende Kraft durch eine Formel aus, so wird darin eine gewisse Constante vorkommen, welche abhängig ist von der Wahl der Einheit der Masse und der Kraft. Für die Bestimmung der Krafteinheit ist bekanntlich eine Zeit- und eine Längeneinheit erforderlich; nachdem diese festgesetzt sind, hat man auch eine Einheit für die Geschwindigkeit; ausserdem hat man auch eine beliebige Masseneinheit anzunehmen. Nachdem dies Alles gehörig bestimmt ist, hat man auch ein Mass für die Kraft: die Kraft P ist nämlich diejenige Kraft, welche der Masseneinheit die Geschwindigkeit P ertheilt, nachdem sie eine Zeiteinheit hindurch auf dieselbe mit gleicher Intensität gewirkt hat. Hat man nun zwei in zwei Punkten concentrirte Massen m und m', in der Entfernung r von einander, so ist $p = \frac{kmm'}{r^2}$ der Ausdruck für die Kraft, welche m auf m' und m' auf m ausübt; die Constante k ist offenbar diejenige Kraft, welche eine Masseneinheit, bei der Entfernung 1, auf eine andere Masseneinheit ausübt, und hängt von der Wahl der Einheiten ab.

Es sei nun ein festes Massensystem gegeben und die Kraft zu bestimmen, welche dies System auf die in einem Punkte concentrirte Masse M ausübt. Die einzelnen Massen des Systems seien $m, m', m'' \ldots$, die Coordinaten derselben, bezogen auf drei beliebig gewählte auf einander senkrechte Coordinatenaxen, resp. $a, b, c; a', b', c' \ldots$, die Coordinaten von M seien x, y, z; die Entfernungen zwischen M und $m, m', m'' \ldots$ seien resp. $r, r', r'' \ldots$. Die Kräfte, welche die einzelnen Massen $m, m' \ldots$ auf M ausüben, sind resp. $\frac{kMm}{r^2}, \frac{kMm'}{r'^2} \ldots$. Nach den Regeln der Statik, mit Hilfe des Kräfteparallelogramms, können alle Kräfte, welche auf einen Punkt wirken, zu Einer Kraft zusammengesetzt werden; aber es ist besser, nicht die erste Kraft mit der zweiten zusammenzusetzen, dann deren Resultante mit der dritten u. s. w., sondern vorher alle einzelnen Kräfte nach drei auf einander senkrechten Richtungen in drei Componenten zu

zerlegen. Dadurch erhält man drei Reihen von Kräften von der Art, dass sämmtliche Kräfte einer jeden Reihe dieselbe Richtung haben, mithin durch Addition zu Einer Kraft zusammengesetzt werden können. Jede der drei Componenten wird erhalten, wenn man die zu zerlegende Kraft mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, welchen sie mit der Richtung bildet, nach welcher zerlegt wird. Nennen wir die drei Winkel, welche die Richtung Mm mit den drei Coordinatenaxen bildet, α, β, γ, so sind die drei den Coordinatenaxen parallelen Componenten der Kraft $\frac{kMm}{r^2}$:

$$\frac{kMm}{r^2}\cos\alpha,\ \frac{kMm}{r^2}\cos\beta,\ \frac{kMm}{r^2}\cos\gamma.$$

Werden die drei Componenten der Gesammtanziehung durch X, Y, Z bezeichnet, so hat man

$$X = kM\left(\frac{m}{r^2}\cos\alpha + \frac{m'}{r'^2}\cos\alpha' + \ldots\right)$$

$$= kM\sum\frac{m}{r^2}\cos\alpha,$$

$$Y = kM\sum\frac{m}{r^2}\cos\beta,$$

$$Z = kM\sum\frac{m}{r^2}\cos\gamma;$$

und da

$$\frac{a-x}{r} = \cos\alpha,\ \frac{b-y}{r} = \cos\beta,\ \frac{c-z}{r} = \cos\gamma,$$

so ist auch

$$X = kM\sum\frac{m(a-x)}{r^3}$$

$$Y = kM\sum\frac{m(b-y)}{r^3}$$

$$Z = kM\sum\frac{m(c-z)}{r^3}.$$

Die ganze in dem Punkte (x, y, z) stattfindende Kraft R und die Winkel λ, μ, ν, welche ihre Richtung mit den drei Coordinatenaxen bildet, erhält man aus den drei Componenten mit Hilfe der Gleichungen

$$X = R\cos\lambda,\ Y = R\cos\mu,\ Z = R\cos\nu,$$

$$R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}.$$

§. 2.

Jene drei Summen, welche die Componenten des Systems darstellen, besitzen zwei bemerkenswerthe Eigenschaften, auf welchen die allgemeine Theorie beruht.

I. *Jene drei Summen sind die partiellen Differentialquotienten Einer Summe.*

Es ist nämlich

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2;$$

daraus ergiebt sich

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x-a}{r},$$

und daraus

$$X = -kM \sum \frac{m}{r^2} \frac{dr}{dx}.$$

Da ferner

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dx} = \frac{d\frac{1}{r}}{dx},$$

so hat man

$$X = kM \sum \frac{md\frac{1}{r}}{dx}$$

oder

$$(1) \quad \begin{cases} X = kM \dfrac{d\Sigma\frac{m}{r}}{dx}, \\[2ex] Y = kM \dfrac{d\Sigma\frac{m}{r}}{dy}, \\[2ex] Z = kM \dfrac{d\Sigma\frac{m}{r}}{dz}. \end{cases}$$

Der Ausdruck

$$\sum \frac{m}{r} = \frac{m}{r} + \frac{m'}{r'} + \frac{m''}{r''} + \cdots$$

d. h. die Summe aller wirkenden Massentheilchen, jedes durch seine Entfernung vom angezogenen Punkt dividirt, spielt eine grosse Rolle, und wird das Potential genannt.

Der Factor M in den Formeln (1) kann fortbleiben, wenn wir dem angezogenen Punkt die Masse 1 geben; ebenfalls kann die Constante k der Einheit gleich gesetzt werden,

wenn nur die Masseneinheit passend gewählt wird: es wird $k = 1$, wenn als Masseneinheit der $(\sqrt{k})$te Theil der ursprünglichen Einheit genommen wird. Unter diesen Voraussetzungen wird, wenn wir das Potential durch v bezeichnen:

$$X = \frac{dv}{dx}, \quad Y = \frac{dv}{dy}, \quad Z = \frac{dv}{dz}.$$

Uebrigens gilt diese Eigenschaft der Componenten, die partiellen Differentialquotienten Einer Summe zu sein, für jedes Anziehungsgesetz, nicht blos für das Newton'sche. Es sei nämlich

$$p = mm'f(r),$$

so wird

$$X = \sum f(r)\frac{a-x}{r}m = -\sum f(r)\frac{dr}{dx}m.$$

Ist ferner

$$\int f(r)\,dr = -\varphi(r),$$

so hat man

$$X = \sum \frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{dr}{dx}m = \sum \frac{d\varphi(r)}{dx}m = \frac{d\Sigma m\varphi(r)}{dx}.$$

Auch für die magnetischen und elektrischen Flüssigkeiten gilt bekanntlich das Newton'sche Gesetz; da aber zwei magnetische oder elektrische Massentheilchen sich abstossen, wenn sie gleichartig sind, und sich anziehen, wenn sie ungleichartig sind, so ist hier

$$p = -\frac{kMm}{r^2}.$$

Wenn also ein System magnetischer oder elektrischer Massentheilchen $m, m' \cdots$ auf ein gleichfalls magnetisches oder elektrisches Massentheilchen wirkt, und wenn wir annehmen, dass das Quantum magnetischen oder elektrischen Fluidums, welches letzteres besitzt, gleich -1 sei, so können wir wieder setzen

$$X = \sum \frac{m(a-x)}{r^3}.$$

In dieser Summe kann m auch negativ werden, was freilich

bei der Gravitation zwischen ponderablen Massentheilchen keinen Sinn hatte.

II. *Zwischen den drei Derivirten der Componenten oder den zweiten Derivirten des Potentials nach den Coordinaten x, y, z des angezogenen Punktes findet folgende bemerkenswerthe Relation statt:*

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0,$$

oder

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = 0.$$

Durch Differentiation der Gleichung

$$X = \sum m \frac{a-x}{r^3}$$

nach x ergiebt sich nämlich

$$\frac{dX}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} = \sum m \left(-\frac{1}{r^3} - \frac{3(a-x)}{r^4}\frac{dr}{dx}\right)$$

$$= \sum m \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5}\right);$$

ebenso ist

$$\frac{dY}{dy} = \frac{d^2v}{dy^2} = \sum m \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-b)^2}{r^5}\right)$$

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{d^2v}{dz^2} = \sum m \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-c)^2}{r^5}\right).$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergiebt sich die Behauptung.

Diese von Laplace[1]) zuerst bemerkte Eigenschaft des Potentials bildet die Grundlage aller Untersuchungen über das Potential.

§. 3.

Gehen wir von einem System discreter Punkte zu einem körperlichen Raum über, der von den anziehenden Massentheilchen stetig erfüllt ist, so verwandeln sich die betrachteten Summen für v, X, $\frac{dX}{dx}$ offenbar in dreifache Integrale. Bezeichnen wir irgend ein Raumelement durch dT, und die Dichtigkeit in demselben durch k, so wird:

$$(1)\qquad \begin{cases} v = \int \frac{k\,dT}{r},\ X = \int k\,dT\,\frac{a-x}{r^3}, \\ \frac{dX}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} = \int k\,dT\left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3\,(a-x)^2}{r^5}\right). \end{cases}$$

Die Integrationen erstrecken sich über den ganzen Raum, den die anziehende Masse einnimmt.

Den Punkt (x, y, z), in welchem die Masse concentrirt ist, auf welche die Wirkung, sei es eines Systems discreter Massenpunkte, oder einer einen Raum stetig erfüllenden Masse, ausgeübt wird, wollen wir von jetzt an, der Kürze halber, beständig mit dem Buchstaben O bezeichnen. Während bei einem System discreter Massenpunkte der Punkt O, wenn anders jene Summen bestimmte endliche Werthe haben sollen, nicht mit einem Punkte des Systems zusammenfallen darf (denn dann würde in einem Gliede jener Summen der Factor $\frac{1}{r}$, und mithin dies eine Glied selbst unendlich werden), so kann bei einem continuirlich mit Masse erfüllten Raum dieser Punkt sehr wohl im Innern der Masse liegen. Denn ein Integral kann mitunter einen bestimmten endlichen Werth behalten, wenn auch in einzelnen seiner Elemente unendlich grosse Factoren vorkommen. In diesem Falle befindet sich das erste und zweite unserer Integrale: dieselben behalten — wie wir sogleich zeigen werden — einen bestimmten endlichen Werth (oder sie werden nicht sinnlos), wenn auch der Punkt O der Masse angehört, obgleich dann $\frac{1}{r}$ für die unendlich nahe bei demselben gelegenen Elemente unendlich gross wird. Unser drittes Integral hingegen wird allerdings jetzt sinnlos werden; daraus folgt aber noch nicht, dass nun auch $\frac{dX}{dx}$ sinnlos ist, sondern nur dies, dass der Werth desselben nicht durch jenes Integral bestimmt ist.

Um dies besser einzusehen, schicken wir einige Bemerkungen über bestimmte Integrale voran.

Bekanntlich kann ein bestimmtes Integral durch eine Fläche dargestellt werden. Hat man eine Curve, deren Gleichung $b = f(a)$ ist, so ist $\int_g^h f(a)da$ die Fläche, welche be-

grenzt wird von den beiden zu den Abscissen g und h gehörigen Ordinaten, und von den zwischen diesen beiden Ordinaten liegenden Stücken der Curve und der Abscissenaxe. Wenn also die Function $f(a)$ zwischen g und h überall endlich ist, so ist klar, dass jenes Integral immer einen bestimmten endlichen Werth hat. Wenn aber eine Ordinate zwischen g und h unendlich wird, so *kann* es sich auch ereignen, dass das Integral sinnlos wird, und zwar entweder dadurch, dass jene Fläche unendlich gross wird, oder dadurch dass sie ganz unbestimmt wird. Es sei z. B. $f(a) = (a - x)^{-\frac{2}{3}}$, wo x eine zwischen 0 und 1 liegende Constante ist. Will man nun die Fläche zwischen 0 und 1 bestimmen, welche $\int\limits_0^1 (a - x)^{-\frac{2}{3}} da$ ist, so wird die zu integrirende Function freilich unendlich für $a = x$, oder die Curve hat für $a = x$ eine Asymptote (Fig. 1.); aber dennoch ist in diesem Fall die Fläche endlich. Denn es ist das unbestimmte Integral

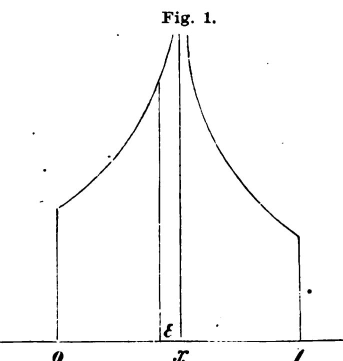
$$\int (a - x)^{-\frac{2}{3}} da = 3\,(a - x)^{\frac{1}{3}}\,,$$

mithin ist die Fläche zwischen 0 und $x - \varepsilon$

$$\int\limits_0^{x-\varepsilon} (a - x)^{-\frac{2}{3}} da = 3x^{\frac{1}{3}} - 3\varepsilon^{\frac{1}{3}},$$

also eine Grösse, die endlich bleibt für $\varepsilon = 0$. Ebenso ist die Fläche zwischen x und 1 endlich. Mithin ist auch die ganze Fläche zwischen 0 und 1 endlich. Wäre der Exponent aber $-\frac{4}{3}$, so würde jede der beiden Flächen, also auch die ganze Fläche unendlich sein; und für den Exponenten $-\frac{5}{3}$ würde die ganze Fläche völlig unbestimmt werden, denn der eine Theil derselben (zwischen 0 und x) würde negativ unendlich, und der andere (zwischen x und 1) positiv unendlich werden.

Fig. 1.



Wenn ein bestimmtes Integral nach einem Parameter zu differenziren ist, so darf man nach der Leibnitz'schen

Regel unter dem Integralzeichen differenziren. Diese Regel ist jedoch nicht immer anwendbar. Denn es kann sich ereignen, dass das ursprüngliche Integral einen Sinn hat, differenzirt aber sinnlos wird. So hat z. B. obiges Integral $\int_0^1 (a-x)^{-\frac{2}{3}} da$ einen bestimmten endlichen Werth, indem

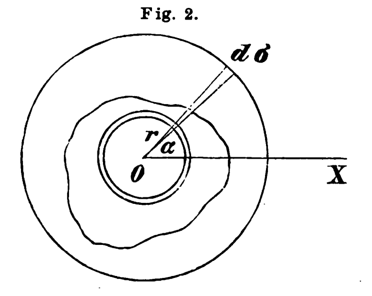
$$\int_0^1 (a-x)^{-\frac{2}{3}} da = 3x^{\frac{1}{3}} + 3(1-x)^{\frac{1}{3}}$$

ist. Differenziren wir die rechte Seite, so entsteht

$$x^{-\frac{2}{3}} - (1-x)^{-\frac{2}{3}},$$

eine Grösse die für alle positiven Werthe des x zwischen 0 und 1 endlich ist. Wenn die Leibnitz'sche Regel in diesem Fall gültig wäre, so müsste diese Grösse auch aus der Differentiation unter dem Integralzeichen hervorgehen. Dadurch entsteht aber $\frac{2}{3}\int_0^1 (a-x)^{-\frac{5}{3}} da$, ein Integral, welches, wie vorhin bemerkt, völlig unbestimmt ist. Es darf also, wenn die Leibnitz'sche Regel anwendbar sein soll, das neue Integral nicht sinnlos werden. Nun ist aber unser drittes Integral unter (1) aus dem zweiten durch Differentiation des letzteren unter dem Integralzeichen entstanden. Die beiden ersten Integrale haben immer einen bestimmten endlichen Werth, wenn nur k nicht unendlich wird; das dritte aber ist sinnlos, wenn der Punkt O im Innern liegt, so dass man also in diesem Fall nicht mehr behaupten kann, es werde $\frac{dX}{dx}$ durch dasselbe bestimmt.

Fig. 2.



Um nun zunächst zu zeigen, dass die beiden ersten unserer drei Integrale in allen Fällen einen bestimmten endlichen Werth haben, beschreibe man um den Punkt O (Fig. 2.), der im Innern der Masse liegen soll, als Mittelpunkt eine

Hilfskugel mit dem Radius 1; die Oberfläche dieser Kugel theile man auf irgend eine Weise in Elemente $d\sigma$, und denke sich den Punkt O mit allen Punkten der Peripherie eines jeden Elementes durch die Geraden verbunden. Auf diese Weise erhält man lauter unendlich dünne Kegel; diese zerschneide man wiederum durch Kugeloberflächen, die mit der ersten concentrisch sind, und deren Radien unendlich wenig von einander verschieden sind. Jeder Kegel schneidet aus jeder dieser Kugelflächen ein Element von der Grösse $r^2 d\sigma$ heraus, wenn r der Abstand der Kugelfläche vom Punkt O ist; und da die Höhe eines der durch den Durchschnitt der Kegel- und Kugeloberflächen gebildeten Raumelemente dr ist, so wird der Inhalt desselben $r^2 dr d\sigma$. Setzt man diesen Werth für dT in das erste Integral unter (1), so entsteht:

$$v = \int rk\,dr\,d\sigma.$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass v nothwendig einen bestimmten endlichen Werth erhalten wird, da die zu integrirende Function überall endlich ist. Auf dieselbe Weise findet man

$$X = \int \frac{a-x}{r}\,k\,dr\,d\sigma,$$

so dass auch X einen bestimmten endlichen Werth hat; denn $\frac{x-a}{r}$ ist der Cosinus des Winkels α, den r mit der X-Axe bildet, also immer ein echter Bruch. Anders verhält es sich mit dem dritten Integral, welches durch die Substitution für dT übergeht in

$$\int k\,\frac{-1+3\left(\frac{a-x}{r}\right)^2}{r}\,dr\,d\sigma = \int k\,\frac{-1+3\cos\alpha^2}{r}\,dr\,d\sigma.$$

Schon der Theil dieses Integrals, welcher einem der Elementarkegel entspricht, wird unendlich, und die Theile, welche verschiedenen Kegeln entsprechen, werden theils positiv, theils negativ unendlich. Das Integral ist mithin völlig unbestimmt. Daraus darf man aber nicht schliessen, dass auch $\frac{dX}{dx}$ sinnlos ist, sondern nur dies, dass jenes Verfahren,

unter dem Integralzeichen zu differenziren, wodurch $\frac{dX}{dx}$ bestimmt werden sollte, jetzt nicht statthaft ist.

Liegt aber der Punkt O ausserhalb der Masse, so ist klar, dass alle drei Integrale, auch das dritte, einen Sinn haben. Für äussere Punkte gilt also auch die Gleichung

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0.$$

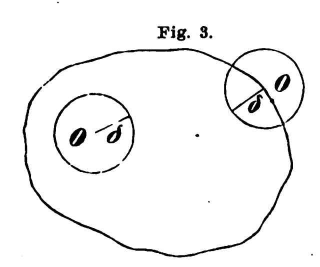
§. 4.

Liegt der Punkt O ausserhalb der Masse, so haben Potential und seine sämmtlichen Derivirten bestimmte endliche Werthe. Daraus kann man den Schluss ziehen, dass im äusseren Raum v und alle Derivirten von v stetige Functionen von x, y, z sind. Denn für die Stetigkeit einer Function ist nur erforderlich, dass ihre Derivirte einen endlichen Werth habe. Anders im Innern und auf der Oberfläche der Masse, wo die Stetigkeit gewisser Functionen in der That nicht mehr stattfindet. Die Functionen v, $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dv}{dz}$ sind freilich auch im Innern und auf der Oberfläche stetig. Um die Stetigkeit von $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dv}{dz}$ für diesen Fall nachzuweisen, müssen wir ein anderes Verfahren in Anwendung bringen; für v reicht die vorige Methode hin, weil nach §. 3. die Derivirten von v immer bestimmte endliche Werthe haben.

Es soll also bewiesen werden, dass $\frac{dv}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dv}{dz}$ sich überall nach der Stetigkeit ändern; das thun sie, obgleich ihre Derivirten $\frac{d^2 v}{dx^2}$ u. s. w. sich jetzt nicht mehr überall stetig ändern. Die Stetigkeit lässt sich hier, wie auch sonst oft, dadurch nachweisen, dass man die in Rede stehende Grösse in zwei Theile zerlegt, von denen der eine offenbar stetig ist, der andere aber so klein gemacht werden kann, wie man nur will. Ist dies möglich, so ist offenbar die Stetigkeit der ganzen Grösse bewiesen. Wir beschreiben also um den Punkt O eine Kugelfläche mit einem beliebigen Radius δ (Fig. 3.); dadurch wird die ganze Masse in zwei Theile zerlegt, in den von der Kugeloberfläche, oder — falls der

Punkt O auf der Oberfläche der Masse liegt — von der Kugeloberfläche und einem Stück der Massenoberfläche begrenzten, und den übrigen. Das Potential des ersten Theiles sei v_1, des zweiten v_2, so dass $v = v_1 + v_2$ und

Fig. 3.



$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv_1}{dx} + \frac{dv_2}{dx}.$$

Nun ist $\frac{dv_2}{dx}$ stetig, weil der Punkt O für die Masse, deren Potential v_2 ist, ein äusserer ist. Setzt man $dT = r^2 d\sigma dr$ (§. 3.), so ist

$$\frac{dv_1}{dx} = \int k d\sigma dr \frac{a-x}{r}.$$

Dies Integral ist, wie leicht zu sehen, kleiner als $4\pi K\delta$, wenn K den grössten Werth des Productes $\frac{a-x}{r}k$ innerhalb des Integrationsgebietes bezeichnet. Denn schreibe ich in dem Integral statt $\frac{a-x}{r}k$ in jedem Element den Werth K, so vergrössere ich; es ist also

$$\frac{dv_1}{dx} < K\int d\sigma \int dr.$$

Da $\int dr = \delta$ ist, und $\int \delta\sigma$ gleich der ganzen oder der halben Oberfläche jener Hilfskugel mit dem Radius 1 (§. 3.), d. i. 4π oder 2π, je nachdem der Punkt O im Innern oder auf der Oberfläche der Masse liegt, so ist jedenfalls

$$\frac{dv_1}{dx} < 4\pi K\delta.$$

Die Grösse $4\pi K\delta$ kann aber, wenn wir δ abnehmen lassen, beliebig klein gemacht werden; dies gilt also um so mehr von der Grösse $\frac{dv_1}{dx}$. Mithin ist $\frac{dv}{dx}$ stetig.

Fassen wir Alles zusammen, so können wir also sagen:

Das Potential v und seine ersten Derivirten nach x, y, z ändern sich im *ganzen* unendlichen Raum nach der Stetigkeit.

Anders verhält es sich, wie wir in der Folge sehen werden, mit den höheren Derivirten.

§. 5.

Für äussere Punkte war

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0. \tag{1}$$

Es entsteht die Frage, welcher Werth dieser Summe für innere Punkte zukomme. Ehe wir diese Untersuchung in ihrer Allgemeinheit vornehmen, wird es gut sein, erst einen speciellen einfachen Fall zu betrachten. Die wirkende Masse soll die Kugelform und eine constante Dichtigkeit besitzen.

Wir stellen uns zunächst eine von zwei concentrischen Kugelflächen begrenzte Hohlkugel vor; dieselbe braucht vorläufig nicht homogen zu sein, aber es soll doch die Dichtigkeit irgend eines Elementes eine blosse Function seiner Entfernung vom Mittelpunkt der Hohlkugel sein. Dann wird das Potential derselben, wie aus der Definition des Potentials hervorgeht, nur eine Function der Entfernung des Punktes O vom Mittelpunkt der Hohlkugel sein. Bezeichnen wir diese Entfernung durch ϱ, so ist also

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\varrho}\frac{d\varrho}{dx}, \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2 v}{d\varrho^2}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)^2 + \frac{dv}{d\varrho}\frac{d^2\varrho}{dx^2};$$

da ferner

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

und folglich

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{x}{\varrho}, \quad \frac{d^2\varrho}{dx^2} = \frac{1}{\varrho} - \frac{x^2}{\varrho^3},$$

o hat man

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2 v}{d\varrho^2}\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{dv}{d\varrho}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{x^2}{\varrho^3}\right).$$

Schreibt man die entsprechenden Gleichungen für $\frac{d^2 v}{dy^2}$ und $\frac{d^2 v}{dz^2}$ auf, so entsteht durch Addition:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{d^2 v}{d\varrho^2} + \frac{dv}{d\varrho}\left(\frac{3}{\varrho} - \frac{\varrho^2}{\varrho^3}\right) = \frac{d^2 v}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{dv}{d\varrho}.$$

Bezieht sich v auf einen äusseren, d. h. nicht in der Masse selbst liegenden Punkt, so hat man, wegen (1), für v diese Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 v}{d\varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{dv}{d\varrho} = 0.$$

Dieselbe ist sehr leicht zu integriren; man setze $\frac{dv}{d\varrho} = s$, so wird:

$$\frac{ds}{d\varrho} + \frac{2s}{\varrho} = 0,$$

oder

$$\frac{ds}{s} + 2\frac{d\varrho}{\varrho} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$ls + 2l\varrho = lc$$

oder

$$s\varrho^2 = c,$$

also

$$s = \frac{dv}{d\varrho} = \frac{c}{\varrho^2},$$

und daraus

$$v = \int \frac{c}{\varrho^2} d\varrho = -\frac{c}{\varrho} + c'. \tag{2}$$

Es sind noch die Constanten c und c' zu bestimmen. Hierbei sind die beiden Fälle zu unterscheiden, ob der Punkt O innerhalb der inneren, oder ausserhalb der äusseren Begrenzungsfläche liegt.

Im ersten Fall ist $c = 0$; denn sonst würde das Potential im Mittelpunkt der Hohlkugel, wo $\varrho = 0$ ist, unendlich werden, während doch das Potential überall einen endlichen Werth hat. Innerhalb der Hohlkugel ist also das Potential constant, $= c'$, woraus man schliesst, dass die Anziehung selbst verschwindet. *Die Hohlkugel übt also auf einen Punkt, der innerhalb ihrer inneren Begrenzung liegt, gar keine Anziehung aus.* Um den constanten Werth c', den das Potential in diesem Falle hat, zu bestimmen, lege man den Punkt O in den Mittelpunkt der Hohlkugel. Man zerlege ferner die ganze Kugelschale in unendlich dünne, concentrische, homogene Schichten, so erhält man zunächst das Potential einer dieser Schichten, wenn man ihre Masse durch ihren Radius dividirt. Bezeichnen wir diesen Radius mit r, so ist das Volumen der Schicht $4\pi r^2 dr$, also ihre Masse $4\pi r^2 k dr$, und ihr Potential $4\pi r k dr$. Mithin ist das Potential der ganzen Hohlkugel, wenn man die Radien der äusseren und inneren Begrenzungsfläche resp. durch α und β bezeichnet,

$$c' = 4\pi \int_{\beta}^{\alpha} r\varkappa dr.$$

Dies ist also das constante Potential in der ganzen Höhlung, und zwar, weil das Potential nach §. 5. sich überall stetig ändert, mit Einschluss der Oberfläche des inneren Raumes.

Während in der Höhlung die Constante c der Gleichung (1) gleich 0 ist, so muss im äusseren Raum die Constante c' gleich 0 sein, da das Potential für wachsende ϱ sich offenbar der Grenze 0 nähert. Im äusseren Raum ist also:

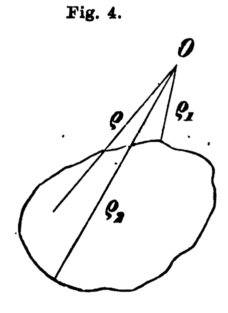
$$(3) \qquad v = \frac{c}{\varrho}.$$

Die Constante c ist gleich der Masse der Hohlkugel. Es findet nämlich der folgende ganz allgemein gültige Satz statt:

Hat man eine irgend wie begrenzte Masse, deren Potential in Bezug auf irgend einen äusseren Punkt O gleich v sei, und bezeichnet man durch ϱ die Entfernung des letzteren von irgend einem festen im Innern der Masse liegenden Punkt, *so ist* $v\varrho$ *ein Product, welches, wenn jener Punkt* O *immer weiter von der Masse fortrückt, sich der constanten Grenze* M *nähert.*

Um dies Theorem, von dem wir auch später wiederholt Gebrauch machen werden, zu beweisen, zerlegen wir die Masse M in zwei Theile, von denen der eine M' die positiven, der andere $-M''$ die negativen Massentheile umfasst. Die kleinste Entfernung des Punktes O von der Masse sei ϱ_1, die grösste ϱ_2 (Fig. 4.). Der Theil des Potentials v, der von der Masse M' herrührt, sei v', der, welcher von der Masse $-M''$ herrührt, v'', so dass $v = v' + v''$. Dann ist:

Fig. 4.



$$(4) \quad \frac{M'}{\varrho_1} > v', \qquad (5) \quad \frac{M'}{\varrho_2} < v',$$

$$(6) \quad \frac{-M''}{\varrho_1} < v'', \qquad (7) \quad \frac{-M''}{\varrho_2} > v''.$$

Addirt man (4) und (7), und auch (5) und (6), und multiplicirt mit ϱ, so entsteht:

$$\frac{\varrho}{\varrho_1} M' - \frac{\varrho}{\varrho_2} M'' > \varrho v,$$

$$\frac{\varrho}{\varrho_2} M' - \frac{\varrho}{\varrho_1} M'' < \varrho v.$$

Hieraus folgt, da, für wachsende ϱ, $\lim \frac{\varrho}{\varrho_1} = 1 = \lim \frac{\varrho}{\varrho_2}$ ist:

$$\lim \varrho v = M' - M'' = M.$$

Die Constante c der Gleichung (3) ist also M, so dass man hat

$$v = \frac{M}{\varrho}.$$

Hieraus folgt weiter, durch Differentiation:

$$X = \frac{dv}{dx} = -\frac{M}{\varrho^2}\frac{x}{\varrho},$$

$$Y = \frac{dv}{dy} = -\frac{M}{\varrho^2}\frac{y}{\varrho},$$

$$Z = \frac{dv}{dz} = -\frac{M}{\varrho^2}\frac{z}{\varrho};$$

woraus sich für die ganze in dem Punkt O stattfindende Kraft R folgende Gleichung ergiebt:

$$R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)} = \frac{M}{\varrho^2}.$$

Daraus der Satz:

Eine Hohlkugel, die aus lauter homogenen concentrischen Schichten besteht, wirkt auf einen Punkt des äusseren Raumes so, als wenn ihre ganze Masse im Mittelpunkt läge.

Für den äusseren Raum ist also:

$$(1) \qquad v = \frac{M}{\varrho} = \frac{4\pi}{\varrho}\int_\beta^\alpha \varrho^2 k d\varrho;$$

und in der ganzen Höhlung:

$$(2) \qquad v = 4\pi \int_\beta^\alpha \varrho k d\varrho.$$

Für den Fall, wo k constant ist, hat man demnach:

$$(1) \qquad v = \frac{4\pi k}{3}\frac{\alpha^3 - \beta^3}{\varrho},$$

bis an die Oberfläche, d. h. bis $\varrho = \alpha$ *incl.*, weil das Potential überall stetig ist;

$$2) \quad v = 2\pi k(\alpha^2 - \beta^2),$$

mit Einschluss der Oberfläche des inneren Raumes.

Wir können jetzt das Potential einer homogenen *Vollkugel überall* bestimmen. Der Kugelradius sei α.

1) Der Punkt O liege im äussern Raum. Da ist die letzte Formel 1) anwendbar, worin wir nur $\beta = 0$ zu setzen brauchen:

$$1) \qquad v = \frac{4\pi k}{3} \cdot \frac{\alpha^3}{\varrho}.$$

2) Der Punkt O liege im Innern der Masse. Wir brauchen nur die Vollkugel durch eine mit ihr concentrische durch O gelegte Kugelfläche in zwei Theile zu zerlegen, so ist das gesuchte Potential gleich der Summe aus dem Potential einer Vollkugel in Bezug auf einen auf deren Oberfläche liegenden Punkt und dem Potential einer Hohlkugel in Bezug auf einen auf ihrer inneren Oberfläche liegenden Punkt:

$$2) \quad v = \frac{4\pi k}{3}\varrho^2 + 2\pi k(\alpha^2 - \varrho^2)$$
$$= 2\pi k\alpha^2 - \tfrac{2}{3}\pi k\varrho^2.$$

Das Potential hat also einen ganz verschiedenen Charakter, je nachdem der Punkt O ausserhalb oder innerhalb der Kugel liegt: im äusseren Raum wäre die Curve, welche das Potential als Function von ϱ darstellt, eine Hyperbel, im Innern eine Parabel. Setzt man aber in den beiden letzten Gleichungen 1) und 2) $\varrho = \alpha$, so müssen ihre beiden rechten Seiten, weil v stetig ist, zusammenfallen, was sie auch thun.

Bilden wir jetzt die Derivirte erster und zweiter Ordnung von v, so wissen wir schon, dass die erster Ordnung stetig ist:

$$1) \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{4\pi k\alpha^3}{3}\frac{x}{\varrho^3};$$

$$2) \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{4\pi k}{3}x.$$

An der Oberfläche fallen auch diese zwei Ausdrücke zusammen. Das Potential und seine erste Derivirte bieten also beide die merkwürdige Erscheinung dar, dass sie beim Uebergang vom innern in den äussern Raum stetig sind, ob-

gleich für beide die sie im innern und äussern Raum darstellenden Ausdrücke wesentlich verschieden sind.

Anders verhält es sich aber mit der zweiten Derivirten. Im äussern Raum haben wir:

$$1)\quad \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{4\pi k}{3}\frac{\alpha^3}{\varrho^3} + 4\pi k\alpha^3\frac{x^2}{\varrho^5},$$

im innern Raum hingegen:

$$2)\qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{4\pi k}{3}.$$

Auf der Oberfläche fällt der zweite Werth nicht mit dem ersten zusammen, sondern ist um $4\pi k\frac{x^2}{\varrho^2}$ kleiner. Es ändert sich daher die zweite Derivirte zwar nach der Stetigkeit im ganzen innern und im ganzen äussern Raum, aber beim Uebergang von dem einen in den andern findet ein Sprung statt: $\frac{d^2 v}{dx^2}$ hat an der Oberfläche zwei Werthe. Ebenso ist es mit den beiden anderen zweiten Derivirten $\frac{d^2 v}{dy^2}$ und $\frac{d^2 v}{dz^2}$.

Für eine homogene kugelförmige Masse ist also im innern Raum

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{4\pi k}{3},$$

folglich die Summe

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = -4\pi k.$$

Für den äussern Raum hat diese Summe den Werth 0. Was ist diese Summe an der Oberfläche? Sie ist nichts Bestimmtes, denn es gilt der eine wie der andere Werth.

§. 6.

Das für die homogene Kugel gefundene Resultat gilt für jede Form der wirkenden Masse, auch wenn letztere nicht homogen ist. Es findet nämlich folgender allgemeine Satz statt:

Wenn der Punkt O sich im Innern der wirkenden Masse befindet, so ist immer der Complex $\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2}$ *gleich dem Product aus* -4π *in die in O stattfindende Dichtigkeit.*

Um dies nachzuweisen, müssen wir uns nach einem Mittel umsehen, die zweiten Derivirten von v im Allge-

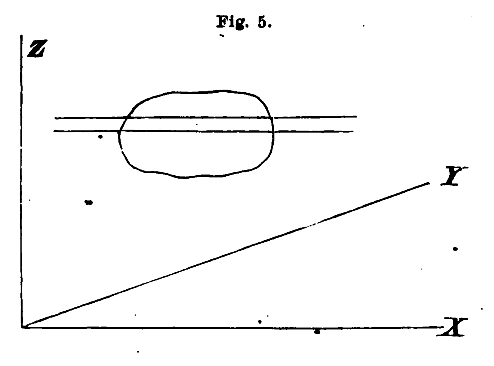
meinen zu bilden, ohne die Integralform zu verlassen; denn das kann man nicht immer, wie in dem speciellen Beispiel einer homogenen kugelförmigen Masse. Es war

$$\frac{dv}{dx} = \int k dT \frac{a-x}{r^3}.$$

Wenn man ein Integral hat, das, wie das vorstehende, einen bestimmten endlichen Werth hat, differenzirt aber sinnlos wird, kann man oft diesem Uebelstande dadurch vorbeugen, dass man das Integral vor dem Differenziren umformt durch theilweises Integriren.

Wir theilen die ganze Masse in unendlich dünne Cylinder, die alle der X-Axe parallel sind (Fig. 5.). Der Querschnitt irgend eines Cylinders sei $d\sigma$. Um den Cylinder in wirkliche Elemente zu zerschneiden, legen wir durch die ganze Masse lauter der YZ-Ebene parallele Ebenen in unendlich-kleinen Entfernungen da von einander.

Fig. 5.



Dann ist das Raumelement $dT = d\sigma da$; also

$$X = \int k d\sigma da \frac{a-x}{r^3};$$

$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2.$$

Man integrire zunächst nach a, fasse also alles zusammen, was in denselben Cylinder fällt, dass man hat:

$$X = \int d\sigma \int k \frac{a-x}{r^3} da.$$

Das auf a bezügliche Integral kann man nun theilweise integriren, da $\frac{a-x}{r^3}$ die Derivirte nach a von $-\frac{1}{r}$ ist, so dass also

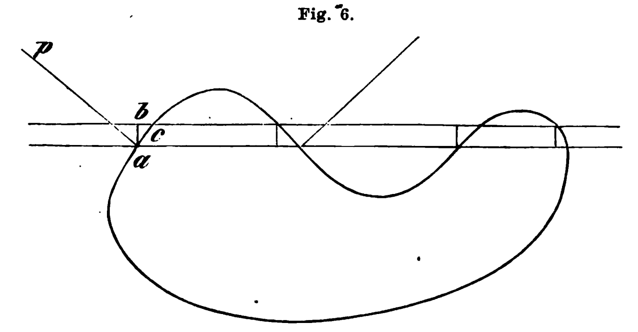
$$X = \int d\sigma \int k \frac{d\left(-\frac{1}{r}\right)}{da} da.$$

Wir nehmen zunächst an, der Punkt 0 liege ausserhalb der Masse; dann wird der Factor $\frac{1}{r}$ in keinem Cylinder unendlich. Die theilweise Integration giebt folgende Gleichung, in welcher die Integrale unbestimmte Integrale sind:

$$\int k \frac{d\left(-\frac{1}{r}\right)}{da} = -\frac{k}{r} + \int \frac{1}{r} \frac{dk}{da} da.$$

Die theilweise Integration darf nur dann für die Umformung eines bestimmten Integrals angewandt werden, wenn das vor das Integralzeichen tretende Glied eine stetige Function ist. Wir müssen also jetzt voraussetzen, dass die Dichtigkeit k eine stetige Function nicht nur von a, sondern weil hernach die Integrale für Y und Z in ähnlicher Weise zu behandeln sind, auch von b und c ist. Geht man zu dem bestimmten Integral über, so muss man berücksichtigen, wo der Cylinder in die Masse eintritt und wo er wieder austritt. Wenn der Cylinder mehrfach ein- und austritt (Fig. 6.),

Fig. 6.



seien die Werthe von r und k an den Ein- und Austrittsstellen r', k'; r'', k'' u. s. w. Dann ist:

$$d\sigma \int k \frac{d\left(-\frac{1}{r}\right)}{da} da = d\sigma \left(\frac{k'}{r'} - \frac{k''}{r''} + \frac{k'''}{r'''} - \dots\right)$$
$$+ d\sigma \int \frac{1}{r} \frac{dk}{da} da.$$

Die beiden in dieser Gleichung enthaltenen Integrale sind bestimmte Integrale und auf alle Elemente eines Cylinders auszudehnen. Das erste Glied der rechten Seite lässt sich

umformen durch Einführung der Elemente der Oberfläche an die Stelle des Cylinderquerschnitts $d\sigma$. Irgend ein Element der Oberfläche, welches ein Cylinder aus letzterer herausschneidet, sei ds. (In der Figur ist $ab = d\sigma$, $ac = ds$.) Dann ist klar, dass

$$d\sigma = ds \cos bac,$$

wo bac den Neigungswinkel bezeichnen soll, den die in ds an die Oberfläche gelegte Tangentialebene mit der YZ-Ebene bildet. Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist der spitze Winkel zwischen den zwei auf ihnen errichteten Normalen. Der Winkel α, welchen die nach aussen errichtete Normale ap mit der positiven Richtung der X-Axe bildet, ist offenbar an der Eintrittsstelle stumpf, an der Austrittsstelle spitz. Bezeichnen wir also die durch den Cylinder aus der Oberfläche ausgeschiedenen Elemente der Reihe nach mit $ds', ds''\ldots$ und die daselbst stattfindenden Werthe von α mit $\alpha', \alpha''\ldots$, so wird

$$d\sigma = -ds' \cos\alpha' = +ds'' \cos\alpha'' = -ds''' \cos\alpha''' = \ldots,$$

und folglich

$$d\sigma \int k \frac{d\left(-\frac{1}{r}\right)}{da}\, da = -\left(\frac{k'}{r'}\cos\alpha'\, ds' + \frac{k''}{r''}\cos\alpha''\, ds'' + \ldots\right) + ds\int \frac{1}{r}\frac{dk}{da}\, da.$$

Dies ist der Beitrag zur Componente X, welchen einer der Cylinder liefert: um die ganze Componente zu erhalten, ist der vorstehende Ausdruck noch doppelt zu integriren. Die Glieder des Aggregates $\frac{k'}{r'}\cos\alpha'\, ds' + \frac{k''}{r''}\cos\alpha''\, ds'' + \ldots$ beziehen sich auf die Oberflächenstücke, die von dem einen Cylinder herausgeschnitten sind; addire ich die Beiträge sämmtlicher Cylinder, so erhalte ich statt jenes Aggregates das doppelte Integral $\int\int \cos\alpha \frac{k}{r}\, ds$, welches über alle Elemente der Oberfläche auszudehnen ist, und es wird:

$$\int k\, dT \frac{a-x}{r^3} = -\int\int \cos\alpha \frac{k}{r}\, ds + \int\int\int d\sigma\, da \frac{1}{r}\frac{dk}{da}. \quad (1)$$

Also unser dreifaches Integral ist umgeformt in die Diffe-

renz von zwei Integralen, von denen das eine ein doppeltes Integral ist, das sich über die ganze Oberfläche der wirkenden Masse erstreckt, während das andere ein dreifaches von demselben Umfang wie das ursprüngliche ist (indem es sich über den ganzen von der Masse erfüllten Raum erstreckt), in welchem aber nur die erste Potenz von r als Divisor erscheint.

Bis jetzt ist die Richtigkeit der Gleichung (1) nur für den Fall bewiesen, dass der Punkt O ausserhalb der Masse liegt. Um ihre Gültigkeit auch für innere Punkte nachzuweisen, wollen wir noch eine zweite Beschränkung machen, dass nämlich innerhalb der Masse, wo ja k stetig sein soll, die Derivirten von k, nämlich $\frac{dk}{da}, \frac{dk}{db}, \frac{dk}{dc}$ nirgends unendlich werden. Wir beschreiben um den Punkt O, der jetzt im Innern liegen soll, eine Kugelfläche mit dem Radius δ, und zerlegen die Componente X in zwei Theile, von denen der eine, den wir mit C bezeichnen wollen, von dem Stück der Masse, welches von dieser Kugelfläche eingeschlossen ist, herrührt. Für den andern ist offenbar die Gleichung (1) ohne Bedenken anwendbar, weil der Punkt O ausserhalb derjenigen Masse liegt, von welcher dieser andere Theil der Componente herrührt; das Doppelintegral der Gleichung (1) bekommt aber einen Zuwachs, herrührend von der Kugeloberfläche, während das dreifache Integral sich nicht mehr auf die ganze ursprüngliche Masse erstreckt, sondern nur auf dieselbe mit Ausschluss des innerhalb der Kugelfläche enthaltenen Stückes. Demnach ist jetzt

$$X = -\int \frac{k \cos \alpha}{r} ds + \int \frac{dk}{da} \frac{1}{r} dT - A - B + C. \qquad (2)$$

Die einzelnen Glieder der rechten Seite der vorstehenden Gleichung haben folgende Bedeutung. Das erste Integral ist ein Flächenintegral und ist auszudehnen auf die ganze Oberfläche der ursprünglichen Masse. Das zweite Integral ist ein dreifaches, und erstreckt sich über die ganze ursprüngliche Masse. Beide Integrale sind also unabhängig von δ. Ferner ist A das Flächenintegral $\int \frac{k \cos \alpha}{r} ds$, aus-

gedehnt über die um O beschriebene Kugelfläche mit dem Radius δ; B ist das dreifache Integral $\int \frac{dk}{da}\frac{1}{r}\,dT$ ausgedehnt über den ganzen Raum jener Kugel; C endlich ist das dreifache Integral $\int k\frac{a-x}{r^3}\,dT$, und erstreckt sich gleichfalls über den ganzen kugelförmigen Raum. Da X offenbar von δ unabhängig ist, und gleichfalls die beiden ersten Integrale der zweiten Seite der Gleichung (2), so muss auch das Aggregat $-A-B+C$ in Bezug auf δ eine Constante sein. Diese Constante kann aber nicht von 0 verschieden sein, da — wie wir sogleich zeigen werden — jenes Aggregat für abnehmende Werthe von δ verschwindet. Mithin ist der in der Gleichung (2) enthaltene Ausdruck für die Componente in Bezug auf einen innern Punkt identisch mit dem in der Gleichung (1) enthaltenen, und letztere gilt allgemein.

Es ergiebt sich nämlich leicht, dass jedes einzelne der drei Glieder A, B, C, wenn man δ abnehmen lässt, sich der Grenze Null nähert. In dem Flächenintegral A ist r constant und gleich δ; setzen wir für $\cos\alpha$ den Werth 1, und für k den grössten Werth k_0, den k auf der Kugeloberfläche hat, so vergrössern wir: folglich ist:

$$A < \frac{k_0}{\delta}\int ds,$$

oder, da $\int ds = 4\pi\delta^2$,

$$A < 4\pi k_0\delta.$$

In B setzen wir statt $\frac{dk}{da}$ den absolut grössten Werth l, den $\frac{dk}{da}$ in der Kugel annimmt (ein solcher existirt, da $\frac{dk}{da}$ nirgends unendlich werden soll): dadurch wird B jedenfalls nicht verkleinert; ferner setzen wir statt dT den Werth $r^2 d\sigma dr$, und erhalten:

$$B \leqq l\int d\sigma \int r dr,$$

oder, wegen $\int r dr = \frac{1}{2}\delta^2$, und $\int d\sigma = 4\pi$,

$$B \leqq 2\pi l\delta^2.$$

Was endlich C betrifft, so ist schon in §. 4. nachgewiesen,

dass es die Grenze Null hat. Man kann also den Radius δ so klein annehmen, dass jede der Grössen A, B, C etwas beliebig Kleines nicht erreicht. Dasselbe gilt, wenn der Punkt O statt im Innern auf der Oberfläche liegt (nach §. 4.). Mithin ist in aller Strenge nachgewiesen, dass auch für innere oder auf der Oberfläche liegende Punkte die Gleichung

$$X = -\int \frac{k \cos\alpha}{r}\, ds + \int \frac{dk}{da}\frac{1}{r}\, dT$$

stattfindet.

Wir bilden jetzt die Derivirte nach x. Den Fall, wo der Punkt O auf der Oberfläche liegt, schliessen wir aus; an der Oberfläche hat $\frac{dX}{dx}$ auch keinen bestimmten Sinn. Die Differentiation unter dem Integralzeichen auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung wird zulässig sein; denn in dem ersten Integral wird r nie Null, da r nicht auf der Oberfläche liegen soll, und das zweite Integral hat ganz die Form eines Potentialintegrals (wenn wir $\frac{dk}{da}$ als Dichtigkeit betrachten), wird also, wie wir schon wissen, nicht sinnlos nach der Differentiation. Es wird:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{dX}{dx} = -\int \frac{k \cos\alpha}{r^2}\frac{a-x}{r}\, ds + \int \frac{dk}{da}\frac{a-x}{r^3}\, dT.$$

Schreiben wir die entsprechenden Gleichungen für $\frac{d^2 v}{dy^2}$ und $\frac{d^2 v}{dz^2}$ auf, so erhalten wir durch Addition:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = -\int \frac{k\, ds}{r^2}\left(\frac{a-x}{r}\cos\alpha + \frac{b-y}{r}\cos\beta + \frac{c-z}{r}\cos\gamma\right)$$
$$+ \int \frac{dT}{r^2}\left(\frac{a-x}{r}\frac{dk}{da} + \frac{b-y}{r}\frac{dk}{db} + \frac{c-z}{r}\frac{dk}{dc}\right). \qquad (3)$$

Der Punkt O soll jetzt im Innern der Masse liegen. Dann können wir, der Allgemeinheit unbeschadet, die Masse kugelförmig annehmen und O in den Mittelpunkt der Masse legen (Fig. 3.), weil wir jede Masse in zwei Theile zerlegen können, so dass für den einen der Punkt O ein äusserer und deshalb $\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0$ ist. Wenn die Masse aber kugelförmig ist und O in ihrem Mittelpunkt liegt, so fällt

die von dem Punkt O oder (x, y, z) nach irgend einem Punkt (a, b, c) der Oberfläche gezogene Gerade mit der in letzterem Punkt errichteten Normale zusammen; da ferner $\frac{a-x}{r}$ der Cosinus des Winkels ist, den jene Gerade mit der X-Axe bildet, so ist $\frac{a-x}{r} = \cos\alpha$, und ebenso $\frac{b-y}{r} = \cos\beta$, $\frac{c-z}{r} = \cos\gamma$; also in dem ersten Integral der Gleichung (3)

$$\frac{a-x}{r}\cos\alpha + \frac{b-y}{r}\cos\beta + \frac{c-z}{r}\cos\gamma = 1.$$

Ferner ist in demselben Integral r constant und gleich dem Radius R der Kugel. Folglich hat man:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} =$$

$$-\frac{1}{R^2}\int k\,ds + \int \frac{dT}{r^2}\left(\frac{a-x}{r}\frac{dk}{da} + \frac{b-y}{r}\frac{dk}{db} + \frac{c-z}{r}\frac{dk}{dc}\right). \tag{4}$$

Es ist leicht zu sehen, dass in dem zweiten Integral dieser Gleichung der Factor von $\frac{dT}{r^2}$ als ein partieller Differentialquotient geschrieben werden kann, wenn man sich die Dichtigkeit ausgedrückt denkt als Function der Entfernung vom Mittelpunkt und zweier Winkel, welche die Lage des radius vector bestimmen. Geht man nämlich von einem Punkt (a, b, c) zu irgend einem andern ihm benachbarten über, dessen Coordinaten $a + da$, $b + db$, $c + dc$ seien, so erleidet die Dichtigkeit eine Aenderung

$$dk = \frac{dk}{da}da + \frac{dk}{db}db + \frac{dk}{dc}dc. \tag{5}$$

Bezeichnen wir den Winkel, den r mit der X-Axe bildet, durch λ, so ist

$$a - x = r\cos\lambda. \tag{6}$$

Rückt nun der Punkt (a, b, c) auf der Linie r um dr fort, und ändert sich a dabei um $d_r a$, so ist auch

$$a + d_r a - x = (r + dr)\cos\lambda. \tag{7}$$

Subtrahirt man (6) von (7), so entsteht:

$$\frac{d_r a}{dr} = \cos\lambda = \frac{a-x}{r}.$$

Ebenso ist natürlich:

$$\frac{d_r b}{dr} = \frac{b - y}{r}, \frac{d_r c}{dr} = \frac{c - z}{r}.$$

Substituirt man in (5) für da, db, dc die Werthe $d_r a$, $d_r b$, $d_r c$, d. h. also die Aenderungen, die a, b, c erleiden, wenn man auf der Linie r bleibt, und dividirt beide Seiten der Gleichung durch dr, so entsteht:

$$\frac{dk}{dr} = \frac{a - x}{r}\frac{dk}{da} + \frac{b - y}{r}\frac{dk}{db} + \frac{c - z}{r}\frac{dk}{dc}.$$

Substituiren wir diesen Werth in (4), und setzen zugleich $r^2 dr d\sigma$ statt dT, so haben wir:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{1}{R^2}\int k ds + \int d\sigma \int \frac{dk}{dr} dr.$$

In dem zweiten Integral der vorstehenden Gleichung lässt sich die Integration nach r ausführen, da das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dk}{dr} dr = k + \text{const}$$

ist. Wir haben von $r = 0$ bis $r = R$ zu integriren. Bezeichnen wir die Werthe des k, die diesen Werthen des r entsprechen, mit k_0 und K, so wird das zweite Integral

$$\int d\sigma\,(K - k_0),$$

und da k_0, die Dichtigkeit im Punkt O, eine Constante ist, so kann man hierfür schreiben

$$\int K d\sigma - k_0 \int d\sigma$$

oder, da $\int d\sigma = 4\pi$, und $d\sigma = \frac{ds}{R^2}$ ist,

$$\frac{1}{R^2}\int K ds - 4\pi k_0.$$

Mithin hat man:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{1}{R^2}\int k ds + \frac{1}{R^2}\int K ds - 4\pi k_0.$$

Bedenkt man, dass das K des zweiten Integrals dieser Gleichung gleich dem k des ersten Integrals ist, nämlich die Dichtigkeit an jeder Stelle der Oberfläche, so hat man schliesslich:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = -4\pi k_0.$$

Haben wir also eine kugelförmige Masse, innerhalb welcher k stetig ist, und $\frac{dk}{da}, \frac{dk}{db}, \frac{dk}{dc}$ nirgends unendlich werden, und bilden den Complex $\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2}$ für den Fall, dass der Punkt O im Mittelpunkt der Masse liegt, so ist derselbe gleich dem Product aus -4π in die im Mittelpunkt stattfindende Dichtigkeit. Daraus folgt aber weiter, dass dieselbe Behauptung gültig bleibt für eine beliebig geformte Masse, wo auch die Dichtigkeit nicht stetig zu sein braucht, auch $\frac{dk}{da}$ u. s. w. gerne unendlich werden kann, wenn nur keins von beiden um den Punkt O herum stattfindet. Beschreiben wir nämlich um den Punkt O herum eine Kugelfläche, so dass innerhalb derselben weder Unstetigkeit von k noch Unendlichwerden der Derivirten von k stattfindet, und nennen den Theil des Potentials v, der von der innerhalb der Kugelfläche enthaltenen Masse herrührt, v', den übrigen v'', so dass $v = v' + v''$, mithin

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{d^2 v'}{dx^2} + \frac{d^2 v''}{dx^2}, \text{ dann ist}$$

$$\frac{d^2 v'}{dx^2} + \frac{d^2 v'}{dy^2} + \frac{d^2 v'}{dz^2} = -4\pi k_0$$

$$\frac{d^2 v''}{dx^2} + \frac{d^2 v''}{dy^2} + \frac{d^2 v''}{dz^2} = 0,$$

folglich

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = -4\pi k_0.$$

Unser Satz gilt demnach für jede Masse, mit Ausnahme der Punkte, um welche herum nicht ein wenn auch noch so kleiner, Raum abgegrenzt werden kann, wo Stetigkeit der Dichtigkeit und kein Unendlichwerden ihrer Derivirten stattfindet. Diese Punkte können keine räumliche Ausdehnung haben, das ist durch die physische Bedeutung einer Masse ausgeschlossen; es können nur einzelne discrete Punkte, Linien oder Flächen sein, für welche unser Satz nicht gültig ist.

Wenn wir bedenken, dass die Dichtigkeit überall im

äussern Raum gleich Null ist, können wir die beiden Sätze über den Werth des Complexes $\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2}$ im innern und äussern Raum in diesen Einen Satz zusammenfassen:

Es ist im ganzen unendlichen Raum, mit Ausnahme gewisser Punkte, Curven, Flächen,

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = -4\pi k_0,$$

unter k_0 die Dichtigkeit an der Stelle (x, y, z) verstanden.

Es ist immer wenigstens eine Ausnahmefläche vorhanden, nämlich die Oberfläche der wirkenden Masse, da die Dichtigkeit sich, so wie man von der Oberfläche nach aussen geht, sprungsweise ändert, um den Werth Null anzunehmen.

§. 7.

Das Potential v einer einen Raum stetig erfüllenden Masse, welche ein zusammenhängendes Ganzes bildet, oder aus mehreren getrennten Theilen besteht, besitzt nach dem Vorhergehenden folgende Eigenschaften:

1) Sowohl v als auch $\frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz}$ sind im ganzen Raum stetige Functionen.

2) Mit Ausnahme von gewissen Punkten, Linien, Flächen ist im ganzen Raum

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = -4\pi k,$$

wo k die Dichtigkeit im Punkte (x, y, z) bezeichnet.

Diesen beiden Eigenschaften fügen wir noch eine dritte hinzu. Wir sahen, dass, wenn der Punkt (x, y, z) immer weiter fortrückt, das Product aus dem Potential und der Entfernung ϱ dieses Punktes von einem festen Punkt sich der constanten Grenze M nähert (§. 5.). Darin liegt, dass das Potential sich der Grenze Null nähert, wenn die Entfernung des Punktes O von der Masse wächst. Dies wäre die dritte Eigenschaft des Potentials. Wir müssen dieselbe aber noch mehr specialisiren. Wir können sagen, dass die drei Producte xv, yv, zv nicht über alle Grenzen hinaus

wachsen können, weil ϱv nicht unendlich wächst, und x, y, z nicht grösser sind als ϱ.

In Bezug auf die Derivirten ergiebt sich folgendes. Es ist $\frac{dv}{dx} = \int \frac{k}{r^2} \frac{a-x}{r} dT$. Wenn wir statt $\frac{a-x}{r}$ in jedem Element des vorstehenden Integrals 1 setzen, so vergrössern wir, oder es ist

$$\frac{dv}{dx} < \int \frac{k}{r^2} dT.$$

Es bezeichnet r die Entfernung eines jeden Elementes der Masse von dem Punkt (x, y, z); setzen wir statt r überall den kleinsten Werth r_1 sämmtlicher r, so vergrössern wir das Integral abermals, so dass

$$\frac{dv}{dx} < \frac{1}{r_1^2} \int k dT.$$

Es ist aber $\int k dT$ gleich der gesammten wirkenden Masse M, also

$$\frac{dv}{dx} < \frac{M}{r_1^2}, \text{ oder } \varrho^2 \frac{dv}{dx} < \frac{\varrho^2}{r_1^2} M.$$

Wenn der Punkt O sich immer weiter entfernt, nähert sich $\frac{\varrho}{r_1}$ der Grenze 1; daraus folgt, dass $\varrho^2 \frac{dv}{dx}$ nicht über alle Grenzen hinaus wachsen kann. Da nun $\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist, so kann $x^2 \frac{dv}{dx}$ *a fortiori* nicht unendlich wachsen.

Demnach stellen wir Folgendes als dritte Eigenschaft des Potentials auf:

3) xv, yv, zv, $x^2 \frac{dv}{dx}$, $y^2 \frac{dv}{dy}$, $z^2 \frac{dv}{dz}$ sind überall endliche Werthe.

Diese drei Eigenschaften sind charakteristisch für das Potential: sie kommen dem Potential zu, *aber es ist auch umgekehrt jede für den ganzen Raum gegebene Function, welche jene drei Eigenschaften besitzt, das Potential des durch k gegebenen Massensystems.* Also dies ist jetzt die Behauptung:

Ist irgend ein Massensystem gegeben, und ist ferner v eine im ganzen Raum (durch eine oder mehrere Formeln)

gegebene Function von x, y, z, welche folgenden drei Bedingungen genügt:

1) v und seine ersten Derivirten nach x, y, z sind überall stetig;

2) mit Ausnahme gewisser Stellen (die aber keine *räumliche* Ausdehnung haben) ist im ganzen Raum

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = -4\pi k,$$

wo k die Dichtigkeit des Massensystems im Punkte x, y, z bezeichnet;

3) die Producte

$$xv,\ yv,\ zv,\ x^2\frac{dv}{dx},\ y^2\frac{dv}{dy},\ z^2\frac{dv}{dz}$$

werden nirgends unendlich;
so ist v das Potential des Massensystems in Bezug auf den Punkt (x, y, z).

Der Beweis dieses Satzes beruht auf folgendem

Hilfssatz.

Sind u und w zwei Functionen von x, y, z, welche nebst ihren ersten Derivirten nach x, y, z innerhalb eines begrenzten Raumes gegeben und stetig sind; bezeichnet man die Elemente dieses Raumes durch dT, und die Elemente seiner Oberfläche durch ds; sind endlich α, β, γ die Winkel, welche die auf ds nach aussen errichtete Normale mit der X-, Y-, Z-Axe bildet, so ist

$$\int\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)w\,dT = \int\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha+\frac{du}{dy}\cos\beta+\frac{du}{dz}\cos\gamma\right)w\,ds$$
$$-\int\left(\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dy}\frac{dw}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{dw}{dz}\right)dT, \qquad (1)$$

wenn das erste Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung über die ganze Oberfläche, die beiden anderen Integrale durch den ganzen Raum ausgedehnt werden[2]).

Beweis. Wir zerlegen den ganzen Raum in Elemente in derselben Weise wie in §. 6., so dass also $dT = d\sigma dx$ wird, und erhalten für den ersten Bestandtheil $\int\frac{d^2u}{dx^2}w\,dT$

des Integrals auf der linken Seite den Ausdruck $\int d\sigma \int \frac{d^2u}{dx^2} w dx$.

Die theilweise Integration auf das Integral $\int \frac{d^2u}{dx^2} w dx$ angewandt, ergiebt

$$w \frac{du}{dx} - \int \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx.$$

Da $w \frac{du}{dx}$ nach der Annahme stetig ist, so dürfen wir zum bestimmten Integral übergehen. Der Werth von $w \frac{du}{dx}$ an der Stelle, wo der Elementarcylinder zuerst eintritt, werde durch $\left(w \frac{du}{dx}\right)'$, wo er zuerst austritt, durch $\left(w \frac{du}{dx}\right)''$ bezeichnet, u. s. w.; dann ist

$$d\sigma \int \frac{d^2u}{dx^2} w dx =$$
$$- d\sigma \left(w \frac{du}{dx}\right)' + d\sigma \left(w \frac{du}{dx}\right)'' - \dots - d\sigma \int \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx.$$

Führen wir, wie in §. 6., wieder die nach aussen gerichtete Normale ein, so wird

$$d\sigma = - ds' \cos \alpha' = + ds'' \cos \alpha'' = \dots,$$

folglich

$$d\sigma \int \frac{d^2u}{dx^2} w dx =$$
$$ds' \cos \alpha' \left(w \frac{du}{dx}\right)' + ds'' \cos \alpha'' \left(w \frac{du}{dx}\right)'' + \dots - d\sigma \int \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx;$$

und wenn wir schliesslich über sämmtliche $d\sigma$ integriren, so erhalten wir

$$\int \frac{d^2u}{dx^2} w dT = \int \cos \alpha \, w \frac{du}{dx} ds - \int \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dT,$$

wo das erste Integral auf der rechten Seite wieder ein Oberflächenintegral ist. Behandeln wir die beiden andern Integrale $\int \frac{d^2u}{dy^2} w dT$, $\int \frac{d^2u}{dz^2} w dT$ in derselben Weise und addiren, so entsteht die Behauptung.

Setzen wir in (1) $w = u$, so haben wir die Gleichung

$$\int\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)u\,dT=\int u\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha+\frac{du}{dy}\cos\beta+\frac{du}{dz}\cos\gamma\right)ds$$
$$-\int\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2\right)dT.$$

Ist ausserdem die Function u so beschaffen, dass die Summe ihrer zweiten Derivirten gleich Null ist, so wird

$$\int\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2+\left(\frac{du}{dz}\right)^2\right)dT=\int u\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha+\frac{du}{dy}\cos\beta+\frac{du}{dz}\cos\gamma\right)ds. \tag{2}$$

Nehmen wir nun an, ausser dem Potential v existire noch eine zweite Function v', die auch jenen drei Bedingungen genüge. Dann ist klar, dass auch die Differenz $u = v - v'$ der ersten und dritten Bedingung genügen muss. Die zweite Eigenschaft des Potentials lautete: Es ist überall (mit Ausnahme gewisser Stellen, *die aber keine räumliche Ausdehnung haben können*)

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=-4\pi k; \tag{3}$$

da nun aber auch

$$\frac{d^2v'}{dx^2}+\frac{d^2v'}{dy^2}+\frac{d^2v'}{dz^2}=-4\pi k \tag{4}$$

(gleichfalls vielleicht mit Ausnahme gewisser Stellen, die aber keine räumliche Ausdehnung haben können), so folgt für u, dass überall

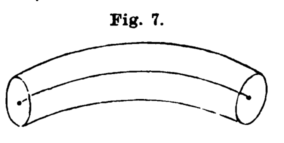
$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=0 \tag{5}$$

ist, ausgenommen erstens diejenigen Stellen, für welche die Gleichung (3), zweitens diejenigen, für welche die Gleichung (4) nicht gilt. Die Ausnahmestellen für Gleichung (5) können demnach auch nur aus einzelnen Punkten oder Curven oder Flächen bestehen. Zu diesen Ausnahmestellen gehören jedenfalls sämmtliche Oberflächen des Massensystems, *also wenigstens eine Fläche.* Jetzt ist nachzuweisen, dass die Function u, die diese Eigenschaften betitzt, *überall gleich Null sein muss*; denn dann würde überall $v = v'$ sein.

Wir beschreiben zu diesem Zwecke einen Cubus, der zum Mittelpunkt den Coordinatenanfangspunkt hat, und dessen Seitenflächen den Axen parallel sind; die Kante des Cubus

sei $2h$. Lassen wir diesen Cubus wachsen, so wird es bald geschehen, dass er alle Ausnahmestellen umfasst. Jetzt isoliren wir alle Ausnahmestellen, indem wir sie in folgender Weise durch Flächen umschliessen. Besteht die Ausnahmestelle in einem Punkt, so legen wir um den Punkt herum eine Kugelfläche; eine Curve isoliren wir durch eine Ringfläche (Fig. 7.); hat man endlich eine Fläche als Ausnahmestelle, so errichte man in allen Punkten derselben nach beiden Seiten Normalen von gleicher Länge: die Endpunkte der Normalen sollen die Isolirungsflächen bilden. So wird der Cubus in eine Reihe *wenigstens zweier* zusammenhängender Räume zerlegt, in denen keine Ausnahmestellen vorkommen. Auf jeden dieser Räume wenden wir die Gleichung (2) an; dies ist statthaft, weil $u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$ überall stetig sind, und innerhalb eines jeden Raumes an jeder Stelle.

Fig. 7.



$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$$

ist. So entsteht eine Reihe von (wenigstens zwei) Gleichungen von der Form (2); addiren wir alle diese Gleichungen, so haben wir:

$$\sum \int \left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2 \right) dT$$
$$= \sum \int u \left(\frac{du}{dx} \cos\alpha + \frac{du}{dy} \cos\beta + \frac{du}{dz} \cos\gamma \right) ds. \tag{6}$$

Die rechte Seite der vorstehenden Gleichung besteht aus lauter Flächenintegralen: was wird aus denselben, wenn die Abschliessungsflächen immer näher an die Ausnahmestellen rücken, und zugleich der Cubus immer grösser wird? Jedes Integral, das sich auf eine um einen Ausnahmepunkt herum gelegte Kugelfläche und auf eine eine Curve abschliessende Ringfläche bezieht, hat die Grenze Null, weil die Kugel- und Ringfläche selbst gegen Null convergiren. In Bezug auf die Integrale, welche sich auf Flächen beziehen, die eine Ausnahmefläche ausschliessen, gilt Folgendes: Die Seiten-

begrenzung der Ausnahmeflächen wird auch unendlich klein; anders ist es mit den beiden parallelen Flächen selbst: die bleiben endlich, wenn auch ihr Abstand von der Ausnahmefläche abnimmt. Deshalb nähern sich auch die zwei Integrale, die sich auf jene zwei parallelen Flächen beziehen, nicht nothwendigerweise der Null, wohl aber, wie leicht zu sehen, entgegengesetzten Werthen, so dass sich die Summe beider der Null nähert. Es bleibt noch das Flächenintegral übrig, welches sich auf die Oberfläche des Cubus bezieht. Jede Seitenfläche des Cubus ist ein Quadrat von der Grösse $4h^2$. Dehnen wir das Integral zunächst über eine der Seitenflächen aus, so sind die drei in demselben vorkommenden Cosinus constant, und zwar ist einer derselben ± 1, die beiden andern 0; denn die Normale bildet mit einer der Axen den Winkel 0 oder 180^0, mit den beiden andern rechte Winkel. Das Flächenintegral reducirt sich also, abgesehen vom Zeichen, auf $\int u \frac{du}{dx} ds$. Dies Integral ist kleiner als die ganze Oberfläche, d. i. $4h^2$, multiplicirt mit dem grössten Werth, den das Product $u \frac{du}{dx}$ auf derselben annimmt. Da xu, und ebenfalls $x^2 \frac{du}{dx}$ eine bestimmte endliche Grenze nicht überschreiten kann, so bleibt auch $x^3 u \frac{du}{dx}$ überall unterhalb einer gewissen Grenze $\varkappa$, d. h. es ist

$$x^3 u \frac{du}{dx} < \varkappa, \text{ also auch } u \frac{du}{dx} h^3 < \varkappa,$$

oder

$$u \frac{du}{dx} < \frac{\varkappa}{h^3},$$

mithin

$$\int u \frac{du}{dx} ds < \frac{4\varkappa}{h}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass wenn wir h wachsen lassen, jenes Integral sich der Grenze Null nähern wird, wenn es nicht etwa von vorne herein schon Null ist. Dasselbe gilt von den auf die fünf übrigen Seiten des Cubus bezüglichen Integralen. Also die zweite Seite der Gleichung (6) wird,

wenn die isolirenden Flächen den Ausnahmestellen immer näher rücken, und die den Cubus begrenzenden Flächen immer weiter rücken, sich der Grenze Null nähern, wenn sie nicht überhaupt schon Null ist. Daraus folgt in aller Strenge, dass $\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2$ in jedem Punkt a, der keiner Ausnahmestelle angehört, Null ist. Denn nehmen wir an, diese Summe wäre in a von Null verschieden, so könnte sie nur positiv sein; nun sind aber $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$, und deshalb $\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2$ stetig; es muss also auch in einem, wenn auch noch so kleinen um a herum liegenden Raum q jene Summe noch positiv sein. Mithin ist der Theil des Integrals

$$\int\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right) dT,$$

der sich auf den Raum q erstreckt, positiv, und zwar jedenfalls nicht kleiner als qN, wenn N das Minimum von

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2$$

innerhalb des Raumes q bezeichnet. Alle übrigen Theile dieses und der auf die anderen Räume, in die der Cubus zerlegt ist, bezüglichen Integrale können nie negativ werden. Also hätten wir auf der einen Seite der Gleichung (6) etwas, das nie unter einen gewissen Werth qN herabsinken kann, auf der andern Seite etwas, das entweder schon Null ist, oder doch der Null beliebig nahe gebracht werden kann. Deshalb ist es unmöglich, dass irgendwo ausserhalb der Ausnahmestellen $\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2$ von 0 verschieden sei. Dieser Complex ist also auch 0 in den Ausnahmestellen, denn er ist *überall* stetig. Daraus folgt, dass im ganzen unendlichen Raum ohne irgend eine Ausnahme

$$\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2 = 0$$

ist. Folglich ist auch überall

$$\frac{du}{dx} = 0, \ \frac{du}{dy} = 0, \ \frac{du}{dz} = 0.$$

Daraus ergiebt sich weiter, dass u im ganzen unendlichen Raum constant sein muss; und daraus, dass xu nicht zu wachsen im Stande ist, ergiebt sich endlich, dass der constante Werth des u kein anderer als 0 sein kann.

Den eben bewiesenen Satz werden wir im folgenden Abschnitt anwenden, um die Richtigkeit der als bekannt vorauszusetzenden Formel für das Potential eines homogenen Ellipsoides nachzuweisen.

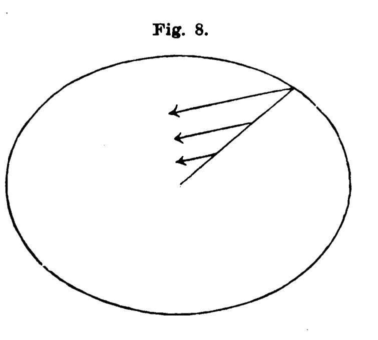
Zweiter Abschnitt.

Potential und Anziehung eines homogenen Ellipsoides.

§. 8.

Die Aufgabe, die Anziehung, welche ein homogenes Ellipsoid auf einen *innern* Punkt ausübt, zu finden, hat schon *Newton* behandelt. Derselbe hat die Aufgabe aber nicht vollständig gelöst: er hat sich auf den Fall eines Umdrehungsellipsoides beschränkt und gefunden, dass die Richtung der Anziehung für alle auf demselben Durchmesser liegenden Punkte dieselbe ist, und die Grösse der Anziehung proportional der Entfernung des angezogenen Punktes vom Mittelpunkt (Fig. 8.). Demnach kam das ganze Problem darauf hinaus, die Anziehung für einen Punkt der Oberfläche zu bestimmen nach Richtung und Intensität. *Newton* hat dies bloss für die am Ende der Umdrehungsaxe und auf dem Aequator liegenden Punkte gethan.[3]) Erst *Mac Laurin* hat die Aufgabe vollständig gelöst.[4]) *Mac Laurin* ging aber weiter und beschäftigte sich mit der Bestimmung der Attraction für einen äussern Punkt; es gelang ihm dies freilich nur für äussere Punkte, die auf der verlängerten Rotationsaxe und in der Ebene des Aequators liegen.[5]) Diese Resultate waren auf gemischtem Wege gefunden: theils durch Construction, theils durch Rechnung. Seine Arbeiten fielen in eine Zeit, wo die Analysis grosses Uebergewicht hatte, und man es unangenehm empfand, dass man nicht rein durch Rechnung zum Resultat gelangen konnte. *Lagrange*

Fig. 8.



hat die *Mac Laurin*'schen Resultate durch blossen Calcül erhalten[6]), hat aber die Lösung nicht weiter gefördert. *D'Alembert* bemerkt, dass sämmtliche Schlüsse *Mac Laurin's* auch für ein ungleichaxiges Ellipsoid gelten.[7]) Der nächste bedeutende Schritt ist von *Legendre*[8]) gemacht. *Legendre* hat die merkwürdige Entdeckung gemacht, dass wenn man überhaupt irgend einen Umdrehungskörper hat und die Attraction für die auf der Umdrehungsaxe befindlichen Punkte kennt, man daraus die Attraction für jeden beliebigen andern Punkt finden kann. Mit Hilfe dieses Satzes hat *Legendre* die Aufgabe für den äusseren Punkt vollständig gelöst, für ein Umdrehungsellipsoid. Auch hat *Legendre* gleichzeitig den nach *Mac Laurin* benannten Satz bestimmt ausgesprochen (bewiesen hat er ihn erst später), der sich bei *Mac Laurin* nur angedeutet findet.[9]) Der *Mac Laurin*'sche Satz lautet:

Wenn die drei Hauptschnitte zweier Ellipsoide resp. dieselben Brennpunkte haben, so haben die Kräfte, mit denen sie denselben äusseren Punkt anziehen, dieselbe Richtung und verhalten sich zu einander wie die Massen der Ellipsoide.

Da die Massen zweier Ellipsoide den Producten ihrer Halbaxen proportional sind, so kann man auch sagen, die Kräfte seien den Producten der Halbaxen proportional. Dieser Satz war ungemein wichtig, weil man damit, auch für das ungleichaxige Ellipsoid, die Aufgabe für den äussern Punkt völlig absolviren konnte, nachdem sie für die im Innern und auf der Oberfläche gelegenen Punkte gelöst war. Denn man durfte ja nur das gegebene Ellipsoid so anwachsen lassen, bis der angezogene Punkt auf der Oberfläche lag. Aber jener Satz war sehr schwierig zu beweisen, war ein blosses Inductionsresultat. Um den Nachweis desselben haben sich die Bemühungen der Mathematiker lange gedreht. *Laplace* hat ihn zuerst allgemein bewiesen, durch Reihenentwicklung.[10]) Einen anderen, aber auch höchst complicirten Beweis hat *Legendre* gegeben.[11]) Später ist die Sache sehr vereinfacht. Wir beweisen nur die Richtigkeit der für das Potential gefundenen Ausdrücke.

Es findet in Bezug auf das Potential eines homogenen Ellipsoides

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

eine ganz andere Formel statt, wenn der angezogene Punkt ein innerer und wenn er ein äusserer ist, wie dies auch schon bei der Kugel der Fall war. Das Potential einer Kugel hatte (für $k=1$) im Innern die Form $2\pi\alpha^2-\frac{2\pi}{3}\varrho^2$, im Aeussern dagegen $\frac{4\pi}{3}\frac{\alpha^3}{\varrho}$. Also im Innern ist das Potential ein Ausdruck zweiten Grades in Bezug auf x, y, z:

$$2\pi\alpha^2-\frac{2\pi}{3}x^2-\frac{2\pi}{3}y^2-\frac{2\pi}{3}z^2.$$

Dieselbe Form findet auch beim Potential des Ellipsoids statt. Die Rechnungen ergeben

$$v=G-Lx^2-My^2-Nz^2;$$

G, L, M, N hängen von elliptischen Integralen ab. Ist die Dichtigkeit gleich 1, so ist, wenn man zur Abkürzung

$$D=\sqrt{\left(\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)\right)}$$

setzt,

$$G=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{D},\quad L=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{D}\frac{1}{s+\alpha^2},$$

$$M=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{D}\frac{1}{s+\beta^2},\quad N=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{D}\frac{1}{s+\gamma^2}.$$

Für einen innern Punkt ist also:

$$1)\quad v=\pi\left(\int_0^\infty\frac{ds}{D}-x^2\int_0^\infty\frac{ds}{D(s+\alpha^2)}-y^2\int_0^\infty\frac{ds}{D(s+\beta^2)}-z^2\int_0^\infty\frac{ds}{D(s+\gamma^2)}\right).$$

Hieraus wollen wir jetzt selbst, mit Benutzung des *Mac Laurin*'schen Satzes, den Ausdruck des Potentials für äussere Punkte entwickeln.

§. 9.

Durch den angezogenen Punkt (x, y, z) legen wir ein dem ursprünglichen confocales Ellipsoid, dessen Halbaxen wir α', β', γ' nennen. Ist v' das Potential des neuen Ellipsoids, so hat man nach dem *Mac Laurin*'schen Satze

$$v : v' = \alpha\beta\gamma : \alpha'\beta'\gamma',$$

oder

$$v = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}\, v'.$$

Die Halbaxen α', β', γ' finden wir durch Auflösung einer cubischen Gleichung. Da der Punkt (x, y, z) nämlich auf der Oberfläche des neuen Ellipsoides liegen soll, so muss

$$\frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} + \frac{z^2}{\gamma'^2} = 1 \tag{a}$$

sein; da ferner das neue Ellipsoid dem alten confocal sein soll, so muss

$$\alpha'^2 - \alpha^2 = \beta'^2 - \beta^2 = \gamma'^2 - \gamma^2$$

sein, so dass wir

$$\alpha'^2 = \alpha^2 + \sigma, \quad \beta'^2 = \beta^2 + \sigma, \quad \gamma'^2 = \gamma^2 + \sigma$$

setzen können: durch Substitution dieser Werthe in (a) entsteht

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + \sigma} + \frac{y^2}{\beta^2 + \sigma} + \frac{z^2}{\gamma^2 + \sigma} = 1. \tag{b}$$

Durch diese cubische Gleichung ist σ völlig bestimmt; denn dieselbe hat nur eine positive Wurzel, weil es nur ein dem ursprünglichen confocales Ellipsoid giebt, das durch den Punkt (x, y, z) geht. Sind α', β', γ' auf diese Weise gefunden, so bestimmt sich der Werth des v' aus der Gleichung 1) des vorigen Paragraphen, die ja bis zur Oberfläche incl. gültig ist. Demnach wird

$$v = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}\,\pi\left(\int_0^\infty \frac{ds'}{D'} - x^2\int_0^\infty \frac{ds'}{D'(s'+\alpha'^2)}\right.$$
$$\left. - y^2\int_0^\infty \frac{ds'}{D'(s'+\beta'^2)} - z^2\int_0^\infty \frac{ds'}{D'(s'+\gamma'^2)}\right),$$

wo

$$D' = \sqrt{\left(\left(1+\frac{s'}{\alpha'^2}\right)\left(1+\frac{s'}{\beta'^2}\right)\left(1+\frac{s'}{\gamma'^2}\right)\right)} = \frac{\sqrt{((s'+\alpha'^2)(s'+\beta'^2)(s'+\gamma'^2))}}{\alpha'\beta'\gamma'}.$$

Die vorstehenden Integrale können wir auf dieselbe Form bringen, welche die in dem für innere Punkte gültigen Potentialausdruck vorkommenden haben, wenn wir $s' = s - \sigma$ setzen. Dadurch wird

$$D' = \frac{1}{\alpha' \beta' \gamma'} \sqrt{((\alpha^2 + s)(\beta^2 + s)(\gamma^2 + s))},$$

oder, da

$$D = \frac{1}{\alpha \beta \gamma} \sqrt{((\alpha^2 + s)(\beta^2 + s)(\gamma^2 + s))}$$

ist, $D' = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'} D$, und folglich

$$2)\quad v = \pi \left(\int_\sigma^\infty \frac{ds}{D} - x^2 \int_\sigma^\infty \frac{ds}{D(s+\alpha^2)} - y^2 \int_\sigma^\infty \frac{ds}{D(s+\beta^2)} - z^2 \int_\sigma^\infty \frac{ds}{D(s+\gamma^2)} \right).$$

Also haben wir einen ganz ähnlichen Ausdruck für den äusseren Punkt, wie für den inneren, nur dass die Integrale jetzt nicht von 0 sondern von σ anfangen: σ hängt, als die positive Wurzel der Gleichung (b), von der Lage des angezogenen Punktes ab.

§. 10.

Um nachzuweisen, dass die rechten Seiten der Gleichungen 1) in §. 8. und 2) in §. 9. das Potential eines homogenen Ellipsoides, resp. für innere und äussere Punkte, darstellen, haben wir nach §. 7. nur zu zeigen, dass sie jenen drei Bedingungen genügen. Der Ausdruck auf der rechten Seite in 1) ist offenbar stetig. Da ferner σ sich stetig ändert, wenn sich der Punkt (x, y, z) im äussern Raum bewegt, so ist auch der Ausdruck auf der rechten Seite in 2) stetig. Da an der Oberfläche $\sigma = 0$ ist, so geht dort der zweite Ausdruck in den ersten über; mithin ändert sich die durch 1) und 2) gegebene Function auch stetig beim Uebergang vom äussern Raum in den inneren.

Wir haben jetzt die Derivirten von v im innern und äussern Raum zu bilden. Wir suchen zunächst die Derivirte von σ nach x aus der Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2 + \sigma} + \frac{y^2}{\beta^2 + \sigma} + \frac{z^2}{\gamma^2 + \sigma} = 1.$$

Die Regel für die Derivirte einer impliciten Function ergiebt:

$$\frac{2x}{\alpha^2 + \sigma} - \frac{x^2}{(\alpha^2 + \sigma)^2} \frac{d\sigma}{dx} - \frac{y^2}{(\beta^2 + \sigma)^2} \frac{d\sigma}{dx} - \frac{z^2}{(\gamma^2 + \sigma)^2} \frac{d\sigma}{dx} = 0,$$

woraus

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{2x}{\alpha^2 + \sigma} \frac{1}{l}$$

folgt, wo zur Abkürzung

$$\frac{x^2}{(\alpha^2+\sigma)^2}+\frac{y^2}{(\beta^2+\sigma)^2}+\frac{z^2}{(\gamma^2+\sigma)^2}=l$$

gesetzt ist. Es ist klar, dass l nicht Null werden kann. Denn dann müssten gleichzeitig x, y, z gleich 0 sein, was nur im Mittelpunkt des Ellipsoides der Fall ist: $\frac{d\sigma}{dx}$ bleibt also immer endlich und ändert sich stetig. Berücksichtigt man für die Differentiation von v im äussern Raum den bekannten Satz:

$$\frac{d}{dx}\int_\sigma^b f(s)ds = -f(\sigma)\frac{d\sigma}{dx},$$

und setzt

$$\sqrt{\left(\left(1+\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{\sigma}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{\sigma}{\gamma^2}\right)\right)}=\Delta,$$

so erhält man leicht:

$$1)\qquad \frac{dv}{dx}=-2\pi x\int_0^\infty\frac{ds}{D\,(s+\alpha^2)}$$

$$2)\qquad \frac{dv}{dx}=\pi\left(-\frac{1}{\Delta}\frac{d\sigma}{dx}+\frac{x^2}{\Delta}\frac{d\sigma}{dx}\frac{1}{\sigma+\alpha^2}+\frac{y^2}{\Delta}\frac{d\sigma}{dx}\frac{1}{\sigma+\beta^2}+\frac{z^2}{\Delta}\frac{d\sigma}{dx}\frac{1}{\sigma+\gamma^2}\right)$$

$$-2\pi x\int_\sigma^\infty\frac{ds}{D\,(s+\alpha^2)}=-2\pi x\int_\sigma^\infty\frac{ds}{D\,(s+\alpha^2)}.$$

Es ist klar, dass beide Ausdrücke stetig sind. An der Oberfläche, wo $\sigma=0$ ist, fallen sie zusammen. Also auch $\frac{dv}{dx}$ $\left(\text{ebenso } \frac{dv}{dy}, \frac{dv}{dz}\right)$ ist im innern und äussern Raum stetig, und auch stetig beim Uebergang vom ersten in den zweiten.

Durch nochmalige Differentiation erhält man:

$$1)\qquad \frac{d^2v}{dx^2}=-2\pi\int_0^\infty\frac{ds}{D\,(s+\alpha^2)}$$

$$2)\qquad \frac{d^2v}{dx^2}=-2\pi\int_\sigma^\infty\frac{ds}{D\,(s+\alpha^2)}+\frac{2\pi x}{\Delta}\frac{1}{\sigma+\alpha^2}\frac{d\sigma}{dx}$$

$$=-2\pi\int_\sigma^\infty\frac{ds}{D\,(s+\alpha^2)}+\frac{\pi}{\Delta}\left(\frac{2x}{\sigma+\alpha^2}\right)^2\frac{1}{l}.$$

Diese beiden Ausdrücke fallen an der Oberfläche nicht zusammen. Schreibt man hiernach die entsprechenden Ausdrücke für $\frac{d^2v}{dy^2}$ und $\frac{d^2v}{dz^2}$ auf und addirt, so entsteht:

$$1)\quad \frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=-2\pi\int\limits_0^\infty\frac{ds}{D}\left(\frac{1}{s+\alpha^2}+\frac{1}{s+\beta^2}+\frac{1}{s+\gamma^2}\right)$$

$$2)\quad \frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=-2\pi\int\limits_\sigma^\infty\frac{ds}{D}\left(\frac{1}{s+\alpha^2}+\frac{1}{s+\beta^2}+\frac{1}{s+\gamma^2}\right)+\frac{4\pi}{\Delta}.$$

Die vorstehenden Integrale lassen sich leicht angeben. Es ist

$$\frac{ds}{D}\left(\frac{1}{s+\alpha^2}+\frac{1}{s+\beta^2}+\frac{1}{s+\gamma^2}\right)=\frac{ds}{D}\frac{d((s+\alpha^2)(s+\beta^2)(s+\gamma^2))}{ds}\frac{1}{(s+\alpha^2)(s+\beta^2)(s+\gamma^2)}$$

$$=\frac{ds}{D}\frac{d(D^2)}{ds}\frac{1}{D^2}=-2\frac{d\left(\frac{1}{D}\right)}{ds}ds;$$

folglich

$$\int\frac{ds}{D}\left(\frac{1}{s+\alpha^2}+\frac{1}{s+\beta^2}+\frac{1}{s+\gamma^2}\right)=-\frac{2}{D}.$$

Für den inneren Punkt sind die Grenzen ∞ und 0: für $s=\infty$ wird das unbestimmte Integral 0, und für $s=0$ wird es -2. Also haben wir

$$1)\quad \frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=-4\pi,$$

wie es, der zweiten Bedingung gemäss, sein muss. Für den äussern Punkt ist die untere Grenze σ: für $s=\sigma$ wird das unbestimmte Integral $-\frac{2}{\Delta}$, folglich das mit -2π multiplicirte bestimmte Integral $-\frac{4\pi}{\Delta}$, was sich gegen $+\frac{4\pi}{\Delta}$ hebt. Also im äussern Raum wird, gleichfalls in Uebereinstimmung mit der zweiten Bedingung:

$$2)\quad \frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}=0.$$

Es ist noch nachzuweisen, dass unsere Ausdrücke auch der dritten Bedingung genügen, der zufolge vx und $x^2\frac{dv}{dx}$ überall endlich bleiben müssen. Dies braucht übrigens nur für den äussern Raum nachgewiesen zu werden. Im äussern Raum ist

$$v = \pi \int_\sigma^\infty \frac{ds}{D} \left(1 - \frac{x^2}{s+\alpha^2} - \frac{y^2}{s+\beta^2} - \frac{z^2}{s+\gamma^2}\right),$$

$$\frac{dv}{dx} = -2\pi x \int_\sigma^\infty \frac{ds}{D(s+\alpha^2)}.$$

Wenn wir ein Integral haben, dessen Elemente alle dasselbe Zeichen haben, so können wir alle Elemente desselben vergrössern, und vergrössern so das Ganze. Der Factor

$$1 - \frac{x^2}{s+\alpha^2} - \frac{y^2}{s+\beta^2} - \frac{z^2}{s+\gamma^2}$$

in dem ersten Integral liegt zwischen 0 und 1: schreiben wir also dafür 1, so vergrössern wir das Integral. Wir hätten also nachzuweisen, dass $x\int_\sigma^\infty \frac{ds}{D}$ nicht wächst, und dass $x^3\int_\sigma^\infty \frac{ds}{D(s+\alpha^2)}$ nicht wächst. Es ist

$$\frac{1}{D} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{((s+\alpha^2)(s+\beta^2)(s+\gamma^2))}}.$$

Bezeichnet man die kleinste der drei Halbaxen mit λ, dann ist

$$\sqrt{((s+\alpha^2)(s+\beta^2)(s+\gamma^2))} > (s+\lambda^2)^{\frac{3}{2}},$$

folglich

$$\frac{1}{\sqrt{((s+\alpha^2)(s+\beta^2)(s+\gamma^2))}} < \frac{1}{(s+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da nun

$$\int \frac{ds}{(s+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = -2(s+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}} + \text{Const},$$

und deshalb

$$\int_\sigma^\infty \frac{ds}{(s+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{(s+\lambda^2)}},$$

so ist

$$\int_\sigma^\infty \frac{ds}{D} < \frac{2\alpha\beta\gamma}{\sqrt{(\sigma+\lambda^2)}}. \tag{a}$$

Es war $\frac{x^2}{\alpha^2+\sigma} + \frac{y^2}{\beta^2+\sigma} + \frac{z^2}{\gamma^2+\sigma} = 1$; es ist also $\frac{x^2}{\alpha^2+\sigma}$ entweder ein echter Bruch oder gleich 1, und deshalb

$$x \leqq (\alpha^2 + \sigma)^{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus in Verbindung mit (*a*) folgt, dass $x\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{ds}{D}$ kleiner ist als

$$2\alpha\beta\gamma\left(\frac{\sigma+\alpha^2}{\sigma+\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

was nicht wächst. Ebenso findet man, dass das zweite Integral $x^3\int\limits_{\sigma}^{\infty}\frac{ds}{D(s+\alpha^2)}$ kleiner ist als

$$\tfrac{2}{3}\alpha\beta\gamma\left(\frac{\sigma+\alpha^2}{\sigma+\lambda^2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

was auch nicht wächst.

§. 11.

Für die Componente der Anziehung, die eine homogene ellipsoidische Masse auf einen Punkt im Innern ausübt, gilt nach dem vorigen Paragraphen die Gleichung:

$$X = -2\pi x\int\limits_{0}^{\infty}\frac{ds}{D(s+\alpha^2)},$$

$$D = \sqrt{\left(\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)\right)}\cdot$$

Dies Integral hängt nur von dem *Verhältniss* der Axen ab, d. h. es ändert sich nicht, wenn man die Axen in demselben Verhältniss zu- oder abnehmen lässt. Dies ist auf der Stelle klar, wenn man statt s die neue Integrationsvariable $t = \frac{s}{\alpha^2}$ einführt, wodurch jenes Integral übergeht in das folgende

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{\left((1+t)\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}t\right)\left(1+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}t\right)\right)}}\cdot\frac{1}{1+t}\cdot$$

Hierin kommt nur das Verhältniss von α zu β, und von α zu γ vor: also das Integral bleibt dasselbe, wenn auch α, β, γ sich ändern, so lange nur $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\alpha}{\gamma}$ constant bleiben. Die X-Componente ist also dieselbe für zwei Ellipsoide, die beide den angezogenen Punkt umschliessen und in ihren

Axen ein constantes Verhältniss haben, während die Axen des einen mit denen des andern in dieselbe Richtung fallen; dasselbe gilt von den beiden anderen Componenten Y und Z. Daraus folgt:

Eine homogene ellipsoidische Schale, die von zwei concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Flächen begrenzt wird, übt auf einen beliebigen innerhalb der Höhlung liegenden Punkt keine Wirkung aus.

Es findet also auch Gleichgewicht statt für einen Punkt, auf den lauter unendlich dünne, homogene, von ähnlichen Flächen begrenzte Schichten wirken, wenn auch die Dichtigkeiten der einzelnen Schichten verschieden sind. Dies Resultat kennt man seit *Newton*; es ist Niemandem eingefallen zu untersuchen, wie es mit der Wirkung einer solchen Schale nach aussen beschaffen ist.

Für den äussern Punkt ist

$$X = -2\pi x \int_{\sigma}^{\infty} \frac{ds}{D(s+\alpha^2)}.$$

Jetzt wollen wir das Ellipsoid sich ändern lassen, so aber dass die Axen dasselbe Verhältniss zu einander behalten. Setzen wir zunächst wieder $s = \alpha^2 t$, so erhalten wir

$$X = -2\pi x \int_{\frac{\sigma}{\alpha^2}}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\left((1+t)\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}t\right)\left(1+\frac{\alpha^2}{\gamma^2}t\right)\right)}} \frac{1}{1+t};$$

σ ist die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2+\sigma} + \frac{y^2}{\beta^2+\sigma} + \frac{z^2}{\gamma^2+\sigma} = 1,$$

oder, wenn wir letztere mit α^2 multipliciren, der Gleichung

$$\frac{x^2}{1+\frac{\sigma}{\alpha^2}} + \frac{y^2}{\frac{\beta^2}{\alpha^2}+\frac{\sigma}{\alpha^2}} + \frac{z^2}{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}+\frac{\sigma}{\alpha^2}} = \alpha^2.$$

Das Integral, auf welches wir hier kommen, hängt also, wegen der unteren Grenze, allerdings von dem absoluten Werth der Axen ab: es findet aber doch etwas Einfaches statt, wenigstens in Bezug auf die Anziehung einer *unendlich-*

dünnen Schale, deren äussere Fläche der inneren ähnlich ist. Die äussere Fläche soll die Halbaxen α, β, γ haben; damit die innere Fläche der äusseren ähnlich sei, setzen wir deren Halbaxen gleich $\alpha(1-\varepsilon)$, $\beta(1-\varepsilon)$, $\gamma(1-\varepsilon)$. Die Componente des äusseren Ellipsoides sei X, die des inneren X': dann wird $X - X'$ die Componente der Schale sein. Setzen wir für den Augenblick $\frac{\alpha}{\beta} = m$, $\frac{\alpha}{\gamma} = n$, so haben wir

$$X = -2\pi x \int_{\frac{\sigma}{\alpha^2}}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{((1+t)(1+m^2 t)(1+n^2 t))}} \frac{1}{1+t},$$

wo σ die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{1+\frac{\sigma}{\alpha^2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{m^2}+\frac{\sigma}{\alpha^2}} + \frac{z^2}{\frac{1}{n^2}+\frac{\sigma}{\alpha^2}} = \alpha^2. \tag{a}$$

Hieraus sieht man, dass die Formel für X' aus der für X erhalten wird, wenn man in letzterer nur statt α setzt $\alpha - \alpha\varepsilon$, denn m und n sind für X' dieselben wie für X. Für ein unendlich kleines ε ist demnach

$$X' = X - \frac{dX}{d\alpha}\varepsilon\alpha,$$

und folglich die Componente einer unendlich dünnen Schale

$$X - X' = \frac{dX}{d\alpha}\varepsilon\alpha.$$

Es ist aber

$$\frac{dX}{d\alpha}\varepsilon\alpha = \varepsilon\alpha \frac{2\pi x}{1+\frac{\sigma}{\alpha^2}} \frac{1}{\sqrt{\left(\left(1+\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{\sigma}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{\sigma}{\gamma^2}\right)\right)}} \frac{d\left(\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)}{d\alpha}. \tag{b}$$

Sehen wir $\frac{\sigma}{\alpha^2}$ als Function von α an und differenziren die Gleichung (a), so entsteht:

$$-\left(\frac{x^2}{\left(1+\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{m^2}+\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)^2}\right)\frac{d\left(\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)}{d\alpha} = 2\alpha.$$

Es wird gut sein, zur Abkürzung $\alpha^2+\sigma$, $\beta^2+\sigma$, $\gamma^2+\sigma$ zu nennen α'^2, β'^2, γ'^2; α', β', γ' werden dann die Halbaxen

des durch den äusseren Punkt (x, y, z) gelegten confocalen Ellipsoides sein. Setzt man gleichzeitig für m^2 und n^2 wieder ihre Werthe, und dividirt beide Seiten der letzten Gleichung durch α^4, so erhält man

$$\frac{d\left(\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)}{d\alpha}\left(\frac{x^2}{\alpha'^4}+\frac{y^2}{\beta'^4}+\frac{z^2}{\gamma'^4}\right)=-\frac{2}{\alpha^3},$$

oder, wenn wir

$$\frac{x^2}{\alpha'^4}+\frac{y^2}{\beta'^4}+\frac{z^2}{\gamma'^4}=\frac{1}{p^2}$$

setzen,

$$\frac{d\left(\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)}{d\alpha}=-\frac{2p^2}{\alpha^3}.$$

Substituiren wir diesen Werth statt $\frac{d\left(\frac{\sigma}{\alpha^2}\right)}{d\alpha}$ in (b), und bezeichnen die Componenten der Schale, die resp. der X-, Y-, Z-Axe parallel sind, durch X, Y, Z, so haben wir

$$X=-4\varepsilon\pi p^2\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}\frac{x}{\alpha'^2}$$

$$Y=-4\varepsilon\pi p^2\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}\frac{y}{\beta'^2}$$

$$Z=-4\varepsilon\pi p^2\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}\frac{z}{\gamma'^2}.$$

Für die Resultante $R=\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}$ findet man einen noch einfacheren Ausdruck, nämlich[12])

$$R=4\varepsilon\pi\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha'\beta'\gamma'}p.$$

Das Volumen des äusseren Ellipsoides ist $\frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma$, das des inneren $\frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma(1-\varepsilon)^3=\frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma(1-3\varepsilon)$; also ist das Volumen der Schale $4\pi\alpha\beta\gamma\varepsilon$, und da die Dichtigkeit $k=1$ ist, so ist auch die Masse der Schale $4\pi\alpha\beta\gamma\varepsilon$. Bezeichnen wir diese Masse durch M, so haben wir

$$R=\frac{Mp}{\alpha'\beta'\gamma'}.$$

Es ist noch die Richtung der Resultante zu bestimmen, d. h. die drei Winkel, welche sie mit den drei Coordinatenaxen bildet. Nennen wir diese Winkel λ, μ, ν, so ist

$$\cos\lambda = \frac{X}{R} = -\frac{x}{\alpha'^2}p,\ \cos\mu = -\frac{y}{\beta'^2}p,\ \cos\nu = -\frac{z}{\gamma'^2}p.$$

Die hier vorkommenden Grössen, sowohl die drei Cosinus, als das p, haben eine einfache geometrische Bedeutung. Die Gleichung des Ellipsoides, dessen drei Halbaxen α', β', γ' sind, lautet:

$$\frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} + \frac{z^2}{\gamma'^2} = 1.$$

Legt man an einen Punkt (x, y, z) dieser Fläche die Tangentialebene, und nennt die laufenden Coordinaten der letztern t, u, v, so ist, da die Gleichung der an den Punkt (x, y, z) der Fläche $L = 0$ gelegten Tangentialebene diese ist:

$$\frac{dL}{dx}(t - x) + \frac{dL}{dy}(u - y) + \frac{dL}{dz}(v - z) = 0,$$

in unserem Fall die Gleichung der Tangentialebene

$$\frac{xt}{\alpha'^2} + \frac{yu}{\beta'^2} + \frac{zv}{\gamma'^2} = 1. \tag{c}$$

Wenn man die Gleichung einer Ebene in die Form gebracht hat, dass das constante Glied auf der zweiten Seite positiv und die Summe der Quadrate der drei Coefficienten von t, u, v gleich 1 ist, so sind diese drei Coefficienten bekanntlich die Cosinus der Winkel, welche das vom Anfangspunkt auf die Ebene herabgelassene Perpendikel mit den drei Axen bildet, und die zweite Seite die Länge des Perpendikels. Multipliciren wir die Gleichung (c) mit p, so entsteht

$$\frac{pxt}{\alpha'^2} + \frac{pyu}{\beta'^2} + \frac{pzv}{\gamma'^2} = p, \tag{d}$$

und in dieser Gleichung haben die Coefficienten von t, u, v die Eigenschaft, dass die Summe ihrer Quadrate gleich 1 ist. Nennen wir also die drei Winkel, die das vom Anfangspunkt, d. i. vom Mittelpunkt des Ellipsoids, auf die in dem Punkt (x, y, z) an das confocale Ellipsoid gelegte Tangentialebene gefällte Perpendikel mit den drei Axen bildet, λ', μ', ν': so ist $\cos\lambda' = \frac{px}{\alpha'^2}$ u. s. w. Also λ und λ', μ und μ', ν und ν' sind Nebenwinkel. Daraus folgt, dass die von der Schale auf den Punkt (x, y, z) ausgeübte Kraft senkrecht gegen

das durch diesen Punkt gelegte confocale Ellipsoid gerichtet ist[12]). Ferner ergiebt sich aus (d), dass die in der Gleichung

$$R = \frac{Mp}{\alpha'\beta'\gamma'}$$

vorkommende Grösse p die Länge jenes Perpendikels ist.

Hat man also eine von zwei concentrischen ähnlichen Ellipsoiden begrenzte unendlich dünne Schale, so ist die Gesammtwirkung, die dieselbe auf einen äussern Punkt ausübt, gleich dem Product aus der Masse der Schale in das vom Mittelpunkt auf die in diesem Punkt an das confocale Ellipsoid gelegte Tangentialebene gefällte Perpendikel, dividirt durch das Product aus den drei Halbaxen des confocalen Ellipsoides; die Richtung der Gesammtwirkung ist senkrecht gegen das confocale Ellipsoid. Sämmtliche Data hängen also von dem confocalen Ellipsoid ab.

Ist die Schale kugelförmig, so ist das confocale Ellipsoid auch eine Kugel; das Perpendikel p ist dann dem Radius ϱ dieser Kugel gleich, und die drei Halbaxen sind auch einzeln gleich ϱ. Unsere Formel liefert also in diesem Falle das schon bekannte Resultat

$$R = \frac{M}{\varrho^2}.$$

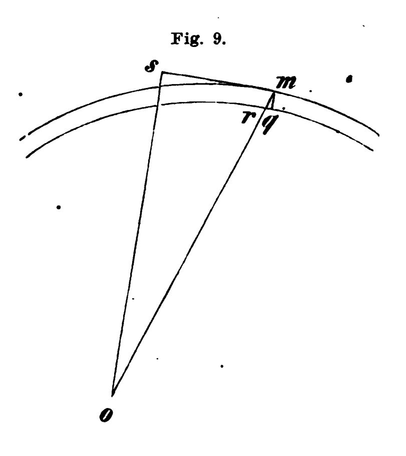
Wir wollen jetzt den äusseren Punkt an die Oberfläche der Schale bringen. In diesem Fall ist das durch den Punkt gelegte, der äusseren Begrenzung der Schale confocale Ellipsoid die äussere Begrenzung selbst: α', β', γ' fallen mit α, β, γ resp. zusammen, und es wird:

$$R = 4\pi\varepsilon pk, \tag{e}$$

während die Richtung der Kraft R senkrecht gegen die äussere Begrenzung ist. Lässt man nun den angezogenen Punkt auf der Oberfläche der Schale sich bewegen, so ändert sich in der Formel für R nichts als p, so dass also die Anziehung dem Perpendikel p proportional ist. Wir werden finden, dass die Anziehung der Dicke der Schale proportional ist, indem p der Dicke proportional ist. In Figur 9. sei o der Mittelpunkt der Schale, m ein beliebiger Punkt der äusseren Grenzfläche, os das von o auf die durch m gehende Tangentialebene gefällte Perpendikel p. Die durch om und

os gelegte Ebene wird die Schale in zwei Curven (Ellipsen) schneiden; *r* sei der Punkt, wo die Gerade *om* die innere Ellipse schneidet. In *m* errichte man auf der äusseren Grenzfläche das Loth, und nenne das Stück *mq* desselben, welches zwischen beiden Grenzflächen enthalten ist, δ: dann ist δ die Dicke der Schale in dem Punkt *m*. Da wir *mq* als senkrecht gegen *rq* ansehen können, so haben wir zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke *oms* und *mrq*; folglich findet diese Proportion statt:

Fig. 9.



$$os : om = mq : mr. \qquad \text{(f)}$$

Sind x, y, z die Coordinaten des Punktes m, so sind, wie leicht zu sehen, $x(1-\varepsilon)$, $y(1-\varepsilon)$, $z(1-\varepsilon)$ die des Punktes r, so dass man hat

$$om : or = 1 : 1 - \varepsilon,$$

oder

$$rm : om = \varepsilon : 1.$$

Hieraus folgt, dass $rm = \varepsilon \cdot om$ ist. Substituirt man diesen Werth statt rm, und zugleich p und δ statt os und mq in (*f*), so entsteht:

$$p : om = \delta : \varepsilon \cdot om;$$

folglich ist $\delta = \varepsilon \cdot p$. Statt (e) können wir also schreiben

$$R = 4\pi\delta k.$$

Wir können demnach sagen: Die Anziehung, welche eine unendlich dünne von zwei concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Flächen begrenzte ellipsoidische Schale auf einen Punkt ihrer äusseren Oberfläche ausübt, ist

1) normal gegen die Oberfläche gerichtet,

2) der Dicke der Schale proportional,

während sie auf die in der Höhlung und auf der inneren Oberfläche liegenden Punkte gar keine Wirkung ausübt.

Dritter Abschnitt.

Das Flächenpotential.

§. 12.

Letztere Eigenschaft der unendlich dünnen ellipsoidischen Schale ist einer grossen Verallgemeinerung fähig. *Coulomb*, der Erste, der die Elektricitätslehre experimentell genau behandelte, bemerkt, dass die Elektricität sich an der Oberfläche der Leiter, wie ein incompressibles Fluidum, in einer homogenen Schicht ansetzt, die man als unendlich dünn ansehen kann: Wirkung nach innen hat nicht statt, denn sonst würde eine weitere Zersetzung der Elektricität im Innern des Leiters stattfinden, und wir hätten kein Gleichgewicht. *Coulomb* fand experimentell, dass die Wirkung einer solchen Schicht an der äussern Oberfläche überall normal gegen letztere und der Dicke der elektrischen Schicht proportional ist. Das *Coulomb*'sche Resultat lautet demnach so: Ist eine sehr dünne homogene Massenschicht so beschaffen, dass ihre Wirkung im Innern überall Null ist, so ist ihre Wirkung an der äusseren Oberfläche normal gegen letztere gerichtet und der Dicke proportional. Man sieht, dass der im vorigen Paragraphen gefundene Satz nur ein specieller Fall dieses allgemeinen Theorems ist. Aber auch letzteres ist später, und zwar von *Laplace*, sehr erweitert. *Laplace* selbst hat freilich nichts hierüber veröffentlicht, aber *Poisson* führt an, dass *Laplace* ihm folgenden Satz mitgetheilt habe[14]):

Man denke sich eine schalenförmige Masse, die von zwei geschlossenen Flächen begrenzt wird. In irgend einem Punkt O der äussern Fläche errichte man auf derselben die Normale, welche die innere Fläche in O' treffe. Dann zerlege man die ganzen in O und O' stattfindenden Kräfte (die von der schalenförmigen Masse herrühren) nach der Nor-

male, und nenne die in die Richtung der Normale fallenden Kräfte P und Q, und zwar betrachte man jede einzelne derselben als positiv oder negativ, je nachdem sie in die nach aussen oder nach innen gerichtete Normale fällt. Ist nun die Dicke δ der Schale unendlich klein, dann ist die Summe jener beiden Componenten, die auch unendlich klein sein werden,

$$P + Q = -4\pi\delta k,$$

wo k die in O und O' stattfindende Dichtigkeit bezeichnet, die auch veränderlich sein kann von Normale zu Normale, *wenn sie sich nur stetig ändert.*

Ist ε die Dicke an einer bestimmten Stelle, so können wir immer die Dicke an irgend einer Stelle gleich $\varepsilon\chi$ setzen, wo χ eine Function von x, y, z ist[15]), so dass wir haben:

$$P + Q = -4\pi\varepsilon\chi k.$$

Dies ist eine Gleichung zwischen unendlich kleinen Grössen erster Ordnung: wir wollen sie so umformen, dass das unendlich Kleine verschwindet. Für ein endliches ε würde die Gleichung so lauten:

$$P + Q + \sigma = -4\pi\varepsilon\chi k, \tag{1}$$

wo σ eine, freilich unbekannte, Function von x, y, z, k, ε ist, von der wir aber wissen, dass sie schneller abnimmt als ε, oder dass $\lim \frac{\sigma}{\varepsilon} = 0$ ist. Statt der von Normale zu Normale veränderlichen Dichtigkeit k (sie kann auch constant sein) setzen wir jetzt eine andere, die überall in demselben Verhältniss grösser sein soll als jene, nämlich $\frac{k}{\varepsilon}$, während die Dicke $\varepsilon\chi$ vorläufig dieselbe bleiben soll: dann ist klar, dass auch Potential und Componenten der Schale in demselben Verhältniss wie die Dichtigkeit grösser werden. Nennen wir also die für die neue Dichtigkeit $\frac{k}{\varepsilon}$ stattfindenden Werthe der nach der Normale zerlegten Componenten P_1 und Q_1, so haben wir $P_1 = \frac{P}{\varepsilon}$, $Q_1 = \frac{Q}{\varepsilon}$. Dividirt man andrerseits die Gleichung (1) durch ε, so entsteht

$$\frac{P}{\varepsilon} + \frac{Q}{\varepsilon} + \frac{\sigma}{\varepsilon} = -4\pi\chi k,$$

folglich ist

$$P_1 + Q_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon} = -4\pi\chi k.$$

Lassen wir in dieser Gleichung ε abnehmen, so lassen wir die Dicke abnehmen und gleichzeitig die Dichtigkeit zunehmen, und zwar findet dabei Folgendes statt: jeder Elementarcylinder der Schale von der Dicke $\varepsilon\chi$, der dem Flächenelement ω entspricht, behält bei der Abnahme des ε dieselbe Masse, da seine Masse $\omega\chi\varepsilon \cdot \frac{k}{\varepsilon} = \omega\chi k$ von ε unabhängig ist; die Schale selbst nähert sich dem Zustand einer mit Masse belegten Fläche, wo auf das Flächenelement ω die Masse $\omega\chi k$ kommt. Damit wir wieder sagen können, die auf einem Flächenelement enthaltene Masse ist gleich dem Product aus diesem Flächenelement in die daselbst stattfindende Dichtigkeit, wollen wir das Product χk jetzt Dichtigkeit nennen und auch wieder mit dem Buchstaben k bezeichnen. Die Grenzen, denen P_1 und Q_1 zustreben, wenn der Process des Abnehmens von ε ins Unendliche fortgesetzt wird, wollen wir p und q nennen; da gleichzeitig der Quotient $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ sich der Grenze Null nähert, so haben wir

$$p + q = -4\pi k.$$

Diese Gleichung ist nur eine andere Form des *Laplace*'schen Satzes, in welcher das unendlich Kleine verschwunden ist, und sagt Folgendes aus:

Hat man eine mit Masse belegte Fläche und versteht unter der Dichtigkeit k an jeder Stelle den Factor, mit dem man das Flächenelement zu multipliciren hat, um die darauf befindliche Masse zu erhalten, so übt jene Fläche an jeder Stelle nach beiden Seiten hin Wirkungen von der Beschaffenheit aus, dass die Summe dieser beiden nach der Normale zerlegten Wirkungen gleich $-4\pi k$ ist.[16])

§. 13.

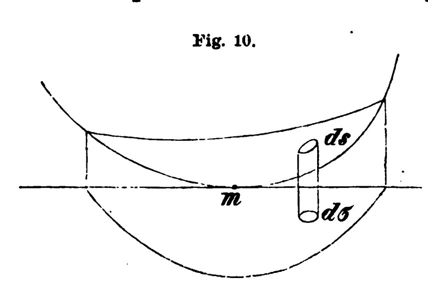
Bezeichnet man mit a, b, c die Coordinaten irgend eines Punktes einer mit Masse belegten Fläche; mit ds das bei (a, b, c) liegende Element derselben, mit k die Dichtig-

keit in ds; mit r die Entfernung des Punktes (a, b, c) von einem Punkte O, dessen Coordinaten x, y, z sind, und mit v den Werth des Potentials der in der Fläche vertheilten Masse in dem Punkt O: dann ist $v = \int \frac{k\,ds}{r}$, durch die ganze Fläche ausgedehnt. Nennen wir die in die Richtung der X-Axe fallende Componente der Kraft, welche jene Masse auf O ausübt, X, so ist $X = \int \frac{k(a-x)\,ds}{r^3}$, gleichfalls durch die ganze Fläche ausgedehnt. So lange der Punkt O ausserhalb der Fläche liegt, ist $\frac{dv}{dx}$ unbedingt einerlei mit X.

Wir zeigen zunächst, dass das Potential v auch jetzt wieder, wie früher, *überall* stetig ist. Dass v und alle Differentialquotienten von v in allen Punkten, die nicht auf die Fläche selbst fallen, stetig sind, leuchtet auf der Stelle ein. Denn wenn ich von einer Function nachweisen will, dass sie sich stetig ändert, brauche ich nur nachzuweisen, dass ihre ersten Derivirten endlich sind: die Endlichkeit von v und irgend einem seiner Differentialquotienten liegt aber auf der Hand. Dass, wenn der Punkt (x, y, z) auf die Fläche tritt, oder auf der Fläche sich bewegt, das Potential nicht blos endlich, sondern auch stetig bleibt, bedarf eines Beweises. Es sei m die Stelle, wo der Punkt auf die Fläche tritt, oder von wo aus er sich auf der Fläche bewegt, und a ein dem Punkt m unendlich nahe liegender Punkt ausserhalb der Fläche. Die Potentialwerthe in a und m seien A und M. Wir zeigen zunächst, dass A unendlich wenig von M verschieden ist. Wäre ein endlicher Unterschied vorhanden, so könnte der nur herrühren von den Theilen der Fläche, die dem Punkt m unendlich nahe sind; denn für den übrigen Theil der Fläche ist nicht nur a sondern auch m ein äusserer Punkt, mithin ändert sich das von diesem Theil herrührende Potential gewiss stetig beim Uebergang von a nach m. Nun lässt sich aber zeigen, dass die Flächentheile, die dem Punkt m unendlich nahe liegen, erstens zu A, zweitens zu M nur unendlich wenig beitragen. Die erste Behauptung leuchtet unmittelbar ein, da in $\int \frac{k\,ds}{r}$ kein Ele-

ment unendlich gross wird, und gleichzeitig die Fläche, über welche sich das Integral erstreckt, unendlich klein ist. Die zweite Behauptung lässt sich folgendermassen beweisen. In m legen wir die Tangentialebene an die Fläche; in derselben beschreiben wir um m einen Kreis mit dem Radius δ (Fig. 10.), und errichten dann in allen Punkten der Peripherie dieses Kreises Perpendikel auf der Tangentialebene. Alle diese Perpendikel bilden eine Cylinderfläche, die von der Fläche ein Stück S abschneidet. Wie gross kann das von diesem Flächenstück herrührende Potential höchstens sein? Die Neigung zwischen der Tangentialebene und irgend einem Element ds der Fläche S sei ψ, die Projection von ds auf letztere sei $d\sigma$: dann ist $d\sigma = \cos\psi\, ds$.

Fig. 10.



Der grösste Winkel ψ, der vorkommt, sei ε; dann ist $d\sigma \geqq ds \cos\varepsilon$, oder $ds \leqq \frac{d\sigma}{\cos\varepsilon}$. Wir dürfen voraussetzen, dass $\varepsilon < 90^0$ ist, da wir das Stück S beliebig klein annehmen können. Setzen wir in dem über S ausgedehnten Integral $\int \frac{k\,ds}{r}$, $\frac{d\sigma}{\cos\varepsilon}$ statt ds, für k den grössten Werth K, und für $\frac{1}{r}$ den Werth $\frac{1}{\varrho}$, wo ϱ die Projection von r ist, die ja nie grösser ist als r, so haben wir $\frac{K}{\cos\varepsilon}\int \frac{d\sigma}{\varrho} \geqq \int \frac{k\,ds}{r}$. Das Integral $\int \frac{d\sigma}{\varrho}$ ist über den Kreis mit dem Radius δ auszudehnen; ϱ ist die Distanz des festen Punktes m von dem Kreiselement $d\sigma$. Theilen wir den Kreis durch Polarcoordinaten, so ist $d\sigma = \varrho\, d\varrho\, d\vartheta$; setzen wir letzteren Werth statt $d\sigma$ in $\int \frac{d\sigma}{\varrho}$ ein, so entsteht $\int d\vartheta\, d\varrho$. Integriren wir zunächst nach ϱ, so ist das unbestimmte Integral $\int d\varrho = \varrho$, und da wir von 0 bis δ zu integriren haben, so ist $\int d\vartheta\, d\varrho = \delta \int d\vartheta = 2\pi\delta$. Mithin ist $\int \frac{k\,ds}{r} \leqq \frac{K}{\cos\varepsilon} \cdot 2\pi\delta$. Dies nähert sich aber mit abnehmendem

δ der Grenze Null. Also ist A von M unendlich wenig verschieden, oder das Potential ändert sich beim Uebergang von a nach m nach der Stetigkeit. Ist nun ferner n ein dem Punkt m unendlich nahe liegender Punkt auf der Fläche, und der Werth des Potentials in n gleich N, so sind A und N gleichfalls unendlich wenig verschieden, also auch N und M, d. h. auch auf der Fläche ändert sich das Potential stetig. Das Potential v einer auf einer Fläche vertheilten Masse ist folglich überall stetig. Aber ganz anders verhält es sich mit der Derivirten $\frac{dv}{dx}$.

§. 14.

Wir wollen das Verhalten von $\frac{dv}{dx}$ oder X nur für den Fall untersuchen, dass der Punkt O sich auf der in irgend einem Punkte der Fläche auf derselben errichteten Normale von der einen Seite der Fläche auf die andere bewegt. Wir richten uns so ein, dass die A-Axe mit dieser Normale zusammenfällt, und der Anfangspunkt mit dem Punkt m der Fläche, in welchem die Normale errichtet ist. Da der Punkt O in der A-Axe bleiben soll, so ist $y = z = 0$, folglich hat in dem Integral

$$X = \frac{dv}{dx} = \int \frac{(a - x)\, k ds}{r^3}$$

r^2 den Werth $(a - x)^2 + b^2 + c^2$. Wir wollen also die beiden Werthe, die das vorstehende Integral für ein unendlich kleines positives x und für ein unendlich kleines negatives x annimmt, mit einander vergleichen, indem wir ihre Differenz zu ermitteln suchen. Für diesen Zweck genügt es offenbar, einen beliebig kleinen den Punkt m einschliessenden Theil der Fläche zu betrachten, da der Beitrag des übrigen Theiles der Fläche zu dem Werth von $\frac{dv}{dx}$ sich stetig ändert: wir werden daher den Werth von $\frac{dv}{dx}$ blos in Bezug auf das Stück S der Fläche betrachten, welches durch den im vorigen Paragraphen construirten Cylinder ausgeschieden wird (Fig. 10.). Auch führen wir statt jedes Flächenelementes

ds wieder seine Projection $d\sigma = ds \cos\psi$ ein: dadurch wird $X = \int \frac{k}{\cos\psi} \frac{a-x}{r^3} d\sigma$, auszudehnen durch die ganze um den Punkt m beschriebene Kreisfläche. Den Radius der letzteren, den wir im vorigen Paragraphen δ nannten, wollen wir jetzt durch R bezeichnen. Von der Grösse $\frac{k}{\cos\psi}$ dürfen wir voraussetzen, dass sie sich auf dem Flächenstück S überall stetig ändert, mit andern Worten, dass der im Divisor vorkommende Winkel ψ überall kleiner als 90^0 ist, insofern wir S beliebig klein annehmen können. Schreiben wir zur Abkürzung h statt $\frac{k}{\cos\psi}$, so haben wir

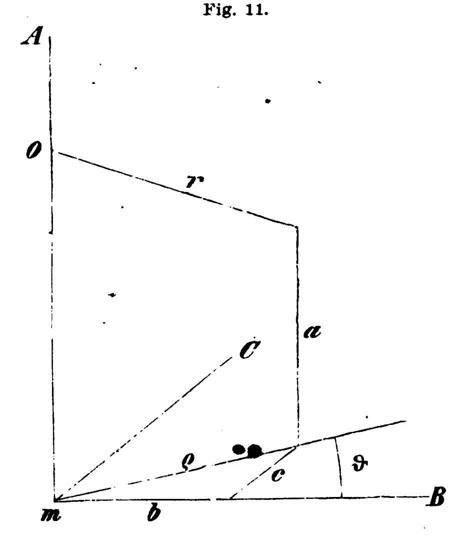
$$X = \int h \frac{a-x}{r^3} d\sigma.$$

Da a, b, c die Coordinaten einer Fläche sind, so ist a eine stetige Function von b und c. Statt b und c wollen wir Polarcoordinaten einführen (Fig. 11.), indem wir setzen: $b = \varrho \cos\vartheta$, $c = \varrho \sin\vartheta$. Der Winkel ϑ erstreckt sich von 0 bis 2π, der *radius vector* ϱ von 0 bis R; das Flächenelement $d\sigma$ wird $\varrho d\vartheta d\varrho$; ferner wird

$$b^2 + c^2 = \varrho^2,\ r^2 = (a-x)^2 + \varrho^2,$$

$$\frac{dv}{dx} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R \frac{h\,(a-x)}{r^3} \varrho d\varrho.$$

Fig. 11.



Der Winkel ϑ ist bei der ersten Integration (nach ϱ) constant. Ist $a = \varphi(b, c)$, so ist $a = \varphi(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)$ die Gleichung des Schnittes der Fläche mit derjenigen Ebene, welche durch die A-Axe geht und mit der Ebene AmB den Winkel ϑ bildet, in rechtwinkligen Coordinaten a und ϱ. Der Schnitt wird nur auf der Seite von m aus betrachtet, wo ϱ

positiv ist, weil der andere Theil, wo ϱ negativ ist, später berücksichtigt wird, wenn wir zu dem Winkel $\pi + \vartheta$ kommen. Der Schnitt ist eine Curve, welche ϱ in dem Punkte m berührt (Fig. 12.), weil ϱ in der Tangentialebene liegt. Daraus folgt, dass $\frac{a}{\varrho}$ für jeden Schnitt ein Quotient ist, der sich der Grenze 0 nähert, wenn ϱ, und damit a unendlich abnimmt, oder dass $\lim\left(\frac{a}{\varrho}\right) = 0$ ist.

Fig. 12.

Das Integral $\int\limits_0^R \frac{h\,(a-x)}{r^3}\,\varrho\,d\varrho$ zerfällt in diese beiden:

$$\int\limits_0^R \frac{h a \varrho\, d\varrho}{r^3}, \quad - x \int\limits_0^R \frac{h \varrho\, d\varrho}{r^3}, \tag{A}$$

von denen wir zunächst das zweite betrachten. Wir können demselben nicht anders beikommen, als wenn wir dasselbe in zwei Theile zerlegen, indem wir zwischen 0 und R eine Zwischengrösse ε einführen; aber diesen Zwischenwerth halten wir nicht fest, sondern derselbe soll mit abnehmendem x auch abnehmen, jedoch so, dass wir ein gewisses Verhältniss in der Abnahme stattfinden lassen, das wir nach unserem Gutdünken reguliren. Wir setzen also

$$- x \int\limits_0^R \frac{h \varrho\, d\varrho}{r^3} = - x \int\limits_0^\varepsilon \frac{h \varrho\, d\varrho}{r^3} - x \int\limits_\varepsilon^R \frac{h \varrho\, d\varrho}{r^3}. \tag{1}$$

In dem Intervall zwischen 0 und dem jedesmaligen ε sei δ der absolut grösste Werth von $\frac{a}{\varrho}$. Von diesem δ kann man voraussagen, dass es mit abnehmendem ε selbst unendlich klein wird; auch ist leicht einzusehen, dass wenn ε unendlich abnimmt, sich δ stetig verändert (es kann auch stellenweise constant bleiben). Man betrachte die Sache erst von dem Augenblicke an, wo δ schon ein echter Bruch ist. Für den absoluten Werth von x, den wir durch $[x]$ bezeichnen wollen, nehmen wir die Grösse $\varepsilon\sqrt{\delta}$, also eine Grösse, die sich stetig ändert. Da δ der absolut grösste Werth von $\frac{a}{\varrho}$ sein sollte, so haben wir

$$\frac{[a]}{\varrho} \leqq \delta \text{ (d. h. in dem Intervall von 0 bis } \varepsilon),$$

oder $[a] \leqq \varrho\delta$, folglich ist *a fortiori*

$$[a] \leqq \delta\,\varepsilon.$$

Auf das erste Integral der rechten Seite der Gleichung (1)

$$-x\int_0^\varepsilon \frac{h\varrho\,d\varrho}{r^3}$$

wenden wir den Satz an, dass wenn unter dem Integralzeichen zwei Factoren vorkommen, von denen der eine $\left(\text{hier } \frac{\varrho}{r^3}\right)$ sein Zeichen nicht ändert, dann das Integral gleich ist einem Product aus dem Integral von dem Factor unveränderlichen Zeichens in einen Werth, der zwischen dem Maximum und Minimum des andern Factors liegt. Demnach ist

$$-x\int_0^\varepsilon \frac{h\varrho\,d\varrho}{r^3} = -x\,H\int_0^\varepsilon \frac{\varrho\,d\varrho}{r^3},$$

wo H zwischen dem grössten und kleinsten Werth liegt, den das h innerhalb des Intervalles von 0 bis ε annimmt. Das Integral

$$\int_0^\varepsilon \frac{\varrho\,d\varrho}{r^3} = \int_0^\varepsilon \frac{\varrho\,d\varrho}{((x-a)^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

besteht aus lauter positiven Elementen. Von einem solchen Integral lassen sich zwei Grenzen angeben, indem man alle Elemente desselben einmal vergrössert und dann verkleinert. Es ist

$$[x] = \varepsilon\sqrt{\delta}, \text{ und } [a] \leqq \delta\varepsilon;$$

da nun von dem Augenblicke an, wo wir die Sache betrachten, δ ein echter Bruch ist und bleibt, so folgt aus den vorstehenden beiden Gleichungen, dass

$$[x] > \delta\varepsilon \geqq [a]$$

ist. Aus dieser Ungleichheit folgt erstens, dass $x + \delta\varepsilon$ und $x - \delta\varepsilon$ immer dasselbe Zeichen haben, und zweitens, dass $x - a$ immer zwischen den beiden Grenzen $x + \delta\varepsilon$ und

$x - \delta\varepsilon$ liegt, wofür wir der Kürze halber sagen wollen, dass $x - a$ zwischen den Grenzen $x \pm \delta\varepsilon$ liegt. Haben wir aber eine Grösse, die zwischen zwei Grenzen liegt, welche einerlei Zeichen haben, so muss auch das Quadrat jener Grösse zwischen den Quadraten derselben beiden Grenzen liegen; es muss demnach $(x - a)^2$ zwischen $(x \pm \delta\varepsilon)^2$ liegen. Hieraus folgt weiter, dass

$$\int_0^\varepsilon \frac{\varrho\, d\varrho}{((x-a)^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ zwischen } \int_0^\varepsilon \frac{\varrho\, d\varrho}{((x \pm \delta\varepsilon)^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

liegt. In diesen beiden Grenzen kommt a, welches eine Function von ϱ war, gar nicht vor; $x \pm \delta\varepsilon$ ist bei der Integration constant. Jene beiden Grenzen sind demnach von der Form $\int_0^\varepsilon \frac{\varrho\, d\varrho}{(m^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}$, wo m eine Constante ist. Es ist aber

$$\int \frac{\varrho\, d\varrho}{(m^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{(m^2+\varrho^2)^{\frac{1}{2}}} + \text{Const.},$$

mithin

$$\int_0^\varepsilon \frac{\varrho\, d\varrho}{(m^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{m} - \frac{1}{(m^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass $-xH\int_0^\varepsilon \frac{\varrho\, d\varrho}{((x-a)^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}$ zwischen den Grenzen

$$H\left(\frac{-x}{[x \pm \delta\varepsilon]} + \frac{x}{((x \pm \delta\varepsilon)^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

liegt. Der Factor H geht zuletzt über in den Werth von h im Anfangspunkt, d. h. in die Dichtigkeit im Anfangspunkt, die wir mit k_0 bezeichnen wollen. Das erste Glied des andern Factors, $\frac{-x}{[x \pm \delta\varepsilon]}$, nähert sich für beide Grenzen dem Werthe $\frac{-x}{[x]}$, d. h. dem Werthe -1, wenn x positiv, und dem Werthe $+1$, wenn x negativ ist, während sich das zweite Glied $\frac{x}{((x \pm \delta\varepsilon)^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}$ sowohl für positive als negative Werthe des x der Null nähert. Mithin ist, für abnehmende x :

$$\lim - x \int_0^\varepsilon \frac{h \varrho \, d\varrho}{((x-a)^2 + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}} = \mp k_0,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem x beim Abnehmen positiv oder negativ ist.

Wir untersuchen jetzt das zweite Integral auf der rechten Seite der Gleichung (1)

$$- x \int_\varepsilon^R \frac{h \varrho \, d\varrho}{((x-a)^2 + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bezeichnen wir den absolut grössten Werth des h in dem Intervall von ε bis R durch H, so ist dies Integral, abgesehen vom Zeichen, kleiner als $x H \int_\varepsilon^R \frac{\varrho \, d\varrho}{((x-a)^2 + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}}$, also auch kleiner als $x H \int_\varepsilon^R \frac{d\varrho}{\varrho^2}$, d. h. kleiner als $H\left(\frac{x}{\varepsilon} - \frac{x}{R}\right)$.

Es ist aber, nach der Annahme, $\lim \frac{x}{\varepsilon} = 0$, und selbstverständlich $\lim \frac{x}{R} = 0$. Also ist die Grenze dieses Integrals 0, und mithin die Grenze des ganzen von 0 bis R ausgedehnten Integrals $- x \int_0^R \frac{h \varrho \, d\varrho}{r^3}$ gleich $\mp k_0$.

Es bleibt das erste der beiden Integrale unter (A), nämlich

$$\int_0^R \frac{h a \varrho \, d\varrho}{((x-a)^2 + \varrho^2)^{\frac{3}{2}}},$$

zu untersuchen für den Fall, dass x unendlich abnimmt. Für diesen Fall müssen wir eine Beschränkung machen. Der für die Grenze des zweiten Integrals unter (A) gefundene Werth $\mp k_0$ beruhte darauf, dass die Function $\frac{a}{\varrho}$ sich der Grenze 0 näherte. Gewöhnlich, wenn eine Function einer Veränderlichen ϱ sich der Grenze Null nähert, geschieht dies so, dass sich aus der Function ein Factor herausziehen lässt, der die Form einer Potenz von ϱ hat, während der andere Factor

endlich ist; und dass dies stattfindet in Bezug auf $\frac{a}{\varrho}$, oder dass $\frac{a}{\varrho} = \varrho^\lambda \sigma \,(\lambda > 0)$, wollen wir annehmen. Wäre dies nicht der Fall (wie z. B. bei dem Ausdruck $\frac{1}{\log \frac{1}{\varrho}}$, der zwar Null wird für $\varrho = 0$, aber sich nicht in die Form $\varrho^\lambda \sigma$ bringen lässt), so liesse sich leicht nachweisen, dass das erste Integral, während x unendlich abnimmt, über alle Grenzen hinaus wachsen würde. Ist jene Bedingung aber erfüllt, so bleibt das erste Integral immer endlich und hat nicht die Unstetigkeit des zweiten Integrals. Um dies zu zeigen, zerlegen wir das erste Integral in zwei Theile:

$$\int_0^\delta \frac{ah\varrho d\varrho}{((x-a)^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_\delta^R \frac{ah\varrho d\varrho}{((x-a)^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir können δ so einrichten, dass der erste Theil für jedes x kleiner wird als etwas beliebig Kleines, und der zweite Theil endlich und stetig ist. Setzen wir nämlich für $\frac{a}{\varrho}$ das Product $\sigma\varrho^\lambda$, so wird der erste Theil $\int_0^\delta \frac{h\sigma\varrho^{\lambda+2} d\varrho}{((x-a)^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}$. Wir vergrössern wieder, indem wir statt der Grösse $h\sigma$ den grössten Werth A setzen, den dieselbe in dem Intervall von 0 bis δ annimmt. Lassen wir $(x-a)^2$ im Divisor fort, so vergrössern wir abermals. Das vorstehende Integral wird folglich kleiner sein als $A\int_0^\delta \varrho^{\lambda-1} \delta\varrho$; dies nähert sich aber mit abnehmendem δ der Grenze Null. Der zweite Theil

$$\int_\delta^R \frac{ah\varrho d\varrho}{((x-a)^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ist offenbar für jedes x endlich und stetig: endlich, weil keins der Elemente des Integrals unendlich gross wird, und stetig, weil seine erste Derivirte nach x endlich ist. Das *ganze* erste Integral unter (A) bleibt also für jedes x endlich und stetig. Nennen wir die Grenze, der dasselbe für ab-

nehmende x zustrebt, M_0, so wird die Summe des ersten und zweiten Integrals, d. i. unser ursprüngliches Integral $\int_0^R \frac{(a-x)\,h\varrho\,d\varrho}{((a-x)^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}}$, wenn x unendlich abnimmt, sich der Grenze $M_0 - k_0$ oder $M_0 + k_0$ nähern, je nachdem x beim Abnehmen als positiv oder negativ vorausgesetzt wird. Dies lässt sich auch so ausdrücken, dass man sagt, es ist

$$\int_0^R \frac{(a-x)\,h\varrho\,d\varrho}{((a-x)^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}} = \mp k_0 + M_0 + \sigma,$$

wo σ eine Function von x ist, die für ein unendlich kleines positives oder negatives x selbst unendlich klein wird. Um $\frac{dv}{dx}$ zu erhalten, integriren wir nun noch nach ϑ:

$$\frac{dv}{dx} = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R \frac{(a-x)\,h\varrho\,d\varrho}{((a-x)^2+\varrho^2)^{\frac{3}{2}}} = \mp k_0 \int_0^{2\pi} d\vartheta + \int_0^{2\pi} M_0\,d\vartheta + \int_0^{2\pi} \sigma\,d\vartheta.$$

Bezeichnen wir das von x unabhängige Integral $\int_0^{2\pi} M_0\,d\vartheta$ durch N, und gehen zur Grenze über, so wird

$$\lim \frac{dv}{dx} = \mp 2\pi k_0 + N.$$

Wir wollen den Grenzwerth von $\frac{dv}{dx}$ bei unendlich abnehmendem positiven x durch $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{+\varepsilon}$, bei unendlich abnehmendem negativen x durch $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{-\varepsilon}$ bezeichnen; dann haben wir

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{+\varepsilon} = -2\pi k + N$$

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{-\varepsilon} = 2\pi k + N,$$

mithin

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{+\varepsilon} - \left(\frac{dv}{dx}\right)_{-\varepsilon} = -4\pi k,$$

wo k die Dichtigkeit an der Stelle, wo die Normale die Fläche trifft, bezeichnet.[17]) Die Derivirte $\frac{dv}{dx}$ ändert sich

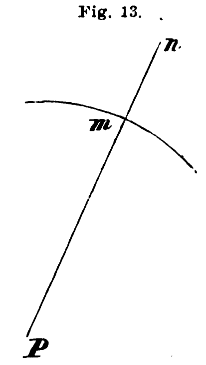
also auf der Normale beim Uebergang von der einen Seite der Fläche auf die andere sprungsweise, und zwar um $4\pi k$.

Dieser Satz ist unendlich wichtig; fast alle Untersuchungen beruhen darauf. Wir können demselben eine etwas andere Form geben. Sei m (Fig. 13.) ein Punkt der Fläche; durch m ziehe man die Normale Pmn; P sei ein fester Punkt auf derselben. Die Distanz irgend eines festen Punktes n auf der Normale von P sei p, und die des Punktes m von P sei α:

$$Pn = p,\ Pm = \alpha.$$

Der Punkt m sei auch ein Anfangspunkt, nämlich für die Distanzen mn, die wir x nennen, so dass $p = \alpha + x$. Auf der Normale hat das Potential an jeder Stelle einen durch p oder x bestimmten Werth; wir können also anstatt v nach x zu differenziren, auch nach p differenziren: $\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dp}$. Da ferner, für $x = \pm \varepsilon$, $p = \alpha \pm \varepsilon$ ist, so ist

Fig. 13.



$$\left(\frac{dv}{dp}\right)_{\alpha+\varepsilon} - \left(\frac{dv}{dp}\right)_{\alpha-\varepsilon} = -4\pi k;$$

k ist die Dichtigkeit an der Stelle, wo die Normale die Fläche trifft.

§. 15.

Dem Potential v einer über eine oder mehrere von einander getrennte Flächen verbreiteten Masse kommen nach dem Vorhergehenden folgende Eigenschaften zu:

1) Das Potential v ist überall stetig. (§. 13.)

2) Ausserhalb der Fläche, resp. Flächen, sind alle Derivirten von v stetig (§. 13.), und (§. 3.)

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0.$$

3) Auf der in irgend einem Punkt einer der Flächen auf letzterer errichteten Normale ist v eine blosse Function der Distanz p, und $\frac{dv}{dp}$ beim Uebergang von der einen Seite der Fläche auf die andere unstetig, indem

$$\left(\frac{dv}{dp}\right)_{\alpha+\varepsilon} - \left(\frac{dv}{dp}\right)_{\alpha-\varepsilon} = -4\pi k$$

ist. (§. 14.)

4) xv, yv, zv, $x^2\frac{dv}{dx}$, $y^2\frac{dv}{dy}$, $z^2\frac{dv}{dz}$ sind immer endliche Werthe, d. h. sie wachsen nicht mit wachsendem x, y oder z. (§. 7.)

Ebenso wie die drei in §. 7. enthaltenen Eigenschaften des Raumpotentials (d. h. des Potentials einer einen Raum erfüllenden Masse) für dasselbe charakteristisch waren, so sind es auch diese vier Eigenschaften für das Flächenpotential, d. h. es giebt nicht noch eine zweite Function v_1, die alle diese Bedingungen erfüllt: alle vier Eigenschaften vereinigt besitzt nur das Flächenpotential. Dies lässt sich ganz ähnlich beweisen, wie jener Satz über das Raumpotential bewiesen ist.

Existirte also ausser dem Flächenpotential noch eine zweite Function v_1, der jene vier Eigenschaften gleichfalls zukämen, so würde die Differenz

$$u = v - v_1$$

folgenden Bedingungen genügen müssen:

1) u ist überall stetig.

2) Ausserhalb der Fläche sind $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ überall stetig, und $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$.

3) $\left(\frac{du}{dp}\right)_{\alpha+\varepsilon} - \left(\frac{du}{dp}\right)_{\alpha-\varepsilon} = 0$; d. h. $\frac{du}{dp}$ ist nicht unstetig beim Uebergang von der einen Seite der mit Masse belegten Fläche auf die andere.

4) xu, yu, zu, $x^2\frac{du}{dx}$, $y^2\frac{du}{dy}$, $z^2\frac{du}{dz}$ bleiben immer endlich.

Um nun zu zeigen, dass ein u, welches diesen vier Bedingungen genügt, nur 0 sein kann, beschreiben wir wieder einen Cubus, in den sämmtliche Flächen fallen, und legen dann an jede Fläche wieder zwei benachbarte Flächen. Dann werden in dem Cubus entweder eine Anzahl zusammenhängender Räume entstehen, oder derselbe wird nur einen einzigen zusammenhängenden Raum bilden, jenachdem unter

den Flächen wenigstens eine in sich zurückkehrende sich befindet oder nicht. Wir machen wieder von diesem Lemma Gebrauch:

Sind erstens u und $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$ innerhalb eines begrenzten Raumes gegeben und stetig, und ist zweitens innerhalb des begrenzten Raumes überall $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$, so ist [§. 7. Gleichung (2)]:

$$\begin{aligned}&\int\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right) dT \\ &= \int u \left(\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma\right) ds,\end{aligned} \tag{1}$$

das erste Integral durch den ganzen begrenzten Raum, das zweite über die ganze Oberfläche desselben ausgedehnt; α, β, γ bezeichnen die Winkel, welche die auf dem jedesmaligen Flächenelement nach aussen errichtete Normale mit den drei Coordinatenaxen bildet.

Der Complex

$$\frac{du}{dx}\cos\alpha + \frac{du}{dy}\cos\beta + \frac{du}{dz}\cos\gamma$$

hat eine einfache Bedeutung. Ist nämlich irgend eine Function von den drei rechtwinkligen Coordinaten, also eine Function des Ortes, $\psi\ (x, y, z)$, gegeben, und zieht man von einem bestimmten Punkt (x, y, z) aus nach irgend einer Richtung irgend eine gerade Linie, so wird die Function ψ sich ändern, wenn man von dem Punkt (x, y, z) aus auf dieser Linie fortgeht; der Werth der Function ψ in dem um ε von dem ersten Punkt entfernten und auf jener Linie liegenden Punkt sei ψ': dann nennt man die Grenze des Quotienten $\frac{\psi' - \psi}{\varepsilon}$ für ein abnehmendes ε die Derivirte der Function *ψ in der Richtung jener Linie.* Wie aus §. 6. hervorgeht, wird diese Derivirte an irgend einer Stelle gefunden, wenn man die drei Differentialquotienten der gegebenen Function nach den drei rechtwinkligen Coordinaten resp. mit den drei Cosinus der Winkel multiplicirt, die diese Richtung mit den drei Axen bildet, und diese drei Producte addirt. Jener

Complex ist also die Derivirte von u in der Richtung der nach *aussen* errichteten Normale, oder $\frac{du}{dp}$. Die Gleichung (1) lässt sich demnach auch so schreiben:

$$\int\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right) dT = \int u \frac{du}{dp}\, ds.$$

Letztere Gleichung wenden wir auf alle jene zusammenhängenden Räume an, und erhalten so die Gleichung:

$$\sum\int\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2\right) dT = \sum\int u \frac{du}{dp}\, ds.$$

Lässt man je zwei benachbarte Abschliessungsflächen einander immer näher rücken, und den Cubus immer grösser werden, so nähert sich die rechte Seite wieder der Null (vgl. §. 7. und die Bedingung 3) für u), wenn sie nicht überhaupt schon Null ist. Deshalb kann nirgends, ausserhalb der Flächen, $\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2$ von 0 verschieden sein; folglich haben wir $u =$ const, zunächst in den einzelnen Räumen, da aber die Function u stetig ist, auch in allen Räumen. Weil aber xu nicht wachsen kann, so muss $u =$ const $= 0$ sein.

Vierter Abschnitt.

Potential und Kugelfunctionen.

§. 16.

Wir wollen den in §. 14. bewiesenen Satz von *Laplace* anwenden auf den Fall einer Kugelfläche. Dazu ist es jedoch erforderlich, das Potential einer über eine Kugelfläche vertheilten Masse in eine Reihe zu entwickeln. Bei der Kugelfläche sind Polarcoordinaten die zweckmässigsten. Die Polarcoordinaten, welche sich auf Punkte der Fläche beziehen, bezeichnen wir durch accentuirte Buchstaben, die des Punktes O durch unaccentuirte. In dem Potentialintegral

$$v = \int \frac{k\,ds}{r}, \quad r = \sqrt{((a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2)}$$

setzen wir also, indem wir den Radius der Kugel R nennen,

$$\begin{aligned} a &= R\cos\vartheta' & x &= \varrho\cos\vartheta \\ b &= R\sin\vartheta'\cos\varphi' & y &= \varrho\sin\vartheta\cos\varphi \\ c &= R\sin\vartheta'\sin\varphi' & z &= \varrho\sin\vartheta\sin\varphi. \end{aligned}$$

Für das Flächenelement ds bekommen wir den Ausdruck $R^2 \sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'$; ferner wird

$$r = \sqrt{\left(R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\left(\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')\right)\right)}. \quad (1)$$

Der Coefficient von $2R\varrho$ in diesem Ausdruck für r ist auch ein Cosinus von einer einfachen Bedeutung, nämlich der Cosinus des Winkels, den die vom Mittelpunkt der Kugel nach einem Punkt irgend eines Flächenelements ds und nach O gezogenen Linien R und ϱ mit einander bilden. Denn nennen wir diesen Winkel ω (Fig. 14.), so hat man offenbar $r^2 = R^2 + \varrho^2 - 2R\varrho\cos\omega$. Vergleicht man dies mit (1), so leuchtet ein, dass

$$\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi') = \cos\omega$$

ist. Demnach wird

$$v = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \frac{k' \sin \vartheta' \, d\vartheta'}{\sqrt{(R^2 - 2R\varrho \cos\omega + \varrho^2)}}.$$

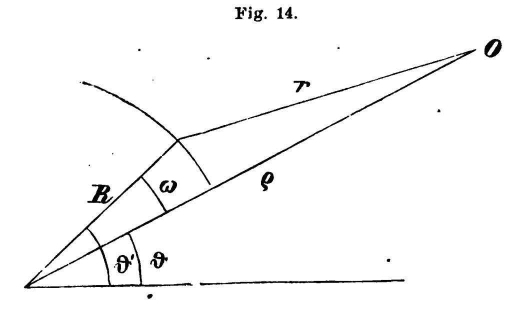
Die reciproke Wurzel, welche in diesem Integral vorkommt, lässt sich in eine Reihe entwickeln; es ist

$$\frac{1}{\sqrt{(R^2 - 2R\varrho \cos\omega + \varrho^2)}} =$$

$$\frac{1}{R\sqrt{\left(1 - 2\frac{\varrho}{R}\cos\omega + \left(\frac{\varrho}{R}\right)^2\right)}} = \frac{1}{\varrho\sqrt{\left(1 - 2\frac{R}{\varrho}\cos\omega + \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2\right)}}.$$

Wir können es also immer so einrichten, dass der Coefficient von $2\cos\omega$ kleiner als 1 ist. Demnach ist zu entwickeln $\frac{1}{\sqrt{(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)}}$, wo α kleiner als 1 ist. Diese reciproke Wurzel bietet sich häufig in der angewandten Mathematik dar; hier ist sie nach Potenzen von α, bei an-

Fig. 14.



deren Gelegenheiten nach den Cosinus der Vielfachen von γ zu entwickeln. Es ist zunächst $\left(1 - (2\alpha\cos\gamma - \alpha^2)\right)^{-\frac{1}{2}}$ gleich einer Reihe, deren allgemeines Glied ist

$$a_n\,(2\alpha\cos\gamma - \alpha^2)^n = a_n\alpha^n(2\cos\gamma - \alpha)^n;$$

$$a_n = \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot 2n-1}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}.$$

Indem man alle Glieder dieser Reihe, welche α^n enthalten, sammelt, findet man als Coefficienten von α^n in der Entwicklung jener Wurzelgrösse:

$$a_n (2\cos\gamma)^n - a_{n-1} \frac{n-1}{1} (2\cos\gamma)^{n-2} + a_{n-2} \frac{n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2} (2\cos\gamma)^{n-4}$$
$$- a'_{n-3} \frac{n-3 \cdot n-4 \cdot n-5}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2\cos\gamma)^{n-6} + \cdots.$$

Also unser Entwicklungscoefficient ist eine ganze Function n^{ten} Grades von $\cos\gamma$. Derselbe spielt eine so grosse Rolle, dass man ihn mit einem besonderen Buchstaben, P, bezeichnet. Demnach ist

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)}} = \cdots\cdots + P_n(\cos\gamma)\,\alpha^n + \cdots\cdots,$$

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{1 \cdot 3 \cdots 2n-1}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \Big((2\cos\gamma)^n - \frac{2n}{2n-1} \frac{n-1}{1} (2\cos\gamma)^{n-2}$$
$$+ \frac{2n \cdot 2n-2}{2n-1 \cdot 2n-3} \frac{n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2} (2\cos\gamma)^{n-4} - \cdots \Big)$$
$$= \frac{1 \cdot 3 \cdots 2n-1}{1 \cdot 2 \cdots n} \Big(\cos\gamma^n - \frac{n \cdot n-1}{2 \cdot 2n-1} \cos\gamma^{n-2}$$
$$+ \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{2 \cdot 4 \cdot 2n-1 \cdot 2n-3} \cos\gamma^{n-4} - \cdots \Big).$$

Sämmtliche Coefficienten P liegen immer zwischen -1 und $+1$. Das kann man aus dieser Form nicht sehen. Giebt man der negativen Potenz $(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ die Form

$$(1 - \alpha e^{\gamma i})^{-\frac{1}{2}} (1 - \alpha e^{-\gamma i})^{-\frac{1}{2}} =$$
$$(1 + a_1 \alpha e^{\gamma i} + \cdots + a_n \alpha^n e^{n\gamma i} + \cdots)(1 + a_1 \alpha^{-\gamma i} + \cdots + a_n \alpha^n e^{-n\gamma i} + \cdots),$$

so überzeugt man sich leicht, dass

$$P_n = a_n e^{n\gamma i} + a_{n-1} a_1 e^{(n-2)\gamma i} + a_{n-2} a_2 e^{(n-4)\gamma i} + \cdots$$

ist. Je zwei Glieder der vorstehenden Reihe, die vom Anfang und Ende gleich weit abstehen, unterscheiden sich nur dadurch von einander, dass da, wo das erste i hat, im zweiten $-i$ steht. Denn das allgemeine Glied ist $a_s a_{n-s} e^{(n-2s)\gamma i}$; nimmt man nun statt s den Werth, der s zu n ergänzt, nämlich $n - s$, so ändert sich blos der Exponent, indem man jetzt erhält $a_s a_{n-s} e^{-(n-2s)\gamma i}$. Vereinigt man also die zwei Glieder, so giebt ihre Summe etwas Reelles, nämlich $2 a_s a_{n-s} \cos(n - 2s)\gamma$. Demnach ist

$$P_n = 2 \sum_0^{n'} a_s a_{n-s} \cos(n - 2s)\gamma,$$

wo $n' = \frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist; im ersten Fall ist aber von dem Gliede, welches $s = \frac{n}{2}$ entspricht, nur die Hälfte zu nehmen.

Also unter allen Umständen ist P_n gleich einer Cosinusreihe mit lauter positiven Coefficienten. Daraus folgt, dass der absolut grösste Werth, den P_n annehmen kann, erhalten wird, wenn alle Cosinus gleich 1 sind, oder $\gamma = 0$ ist. Für $\gamma = 0$ ist P_n aber der Coefficient der Entwicklung von $\frac{1}{1-\alpha}$. Folglich liegt P_n immer zwischen $+1$ und -1. Damit ist zugleich strenge bewiesen, dass unsere Entwicklung convergirt.

Nach dem Obigen hat man

$$P_0 = 1 \qquad P_2 = \tfrac{3}{2}\left(\cos\gamma^2 - \tfrac{1}{3}\right)$$
$$P_1 = \cos\gamma \qquad P_3 = \tfrac{5}{2}\left(\cos\gamma^3 - \tfrac{3}{5}\cos\gamma\right) \text{ u. s. w.}$$

Wir bemerken noch beiläufig, dass P_n sich auch so schreiben lässt[18]:

$$P_n = \cos\frac{\gamma}{2}^{2n} - \left(\frac{n}{1}\right)^2 \cos\frac{\gamma}{2}^{2n-2} \sin\frac{\gamma}{2}^2 + \left(\frac{n\cdot n-1}{1\cdot 2}\right)^2 \cos\frac{\gamma}{2}^{2n-4} \sin\frac{\gamma}{2}^4 - \cdots$$

Es war

$$v = R^2 \int\int \frac{k' \sin\vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi'}{\sqrt{(R^2 - 2R\varrho\cos\omega + \varrho^2)}}.$$

Liegt nun der Punkt O im innern Raum, oder ist $\varrho < R$, so setzen wir:

$$v = R \int\int \frac{k' \sin\vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi'}{\sqrt{\left(1 - 2\frac{\varrho}{R}\cos\omega + \left(\frac{\varrho}{R}\right)^2\right)}},$$

ist aber der Punkt im äussern Raum, oder $\varrho > R$:

$$v = \frac{R^2}{\varrho} \int\int \frac{k' \sin\vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi'}{\sqrt{\left(1 - 2\frac{R}{\varrho}\cos\omega + \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2\right)}}.$$

Im ersten Fall giebt die Wurzelgrösse entwickelt:

$$\sum_0^\infty \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n P_n(\cos\omega).$$

Das Summenzeichen, so wie $\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n$ kann man vor das Integralzeichen setzen, so dass für den inneren Punkt die Gleichung

$$v = R \sum_0^\infty \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n \int\int k' P_n (\cos \omega) \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'$$

gilt. Für den äusseren Punkt findet man in derselben Weise die Gleichung:

$$v = R \sum_0^\infty \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+1} \int\int k' P_n (\cos \omega) \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'.$$

Diese Reihen convergiren, so lange k endlich ist und $\frac{\varrho}{R}$ oder $\frac{R}{\varrho}$ echte Brüche sind.

§. 17.

Wir wenden jetzt unsern allgemeinen Satz über das Potential einer mit Masse belegten Fläche an, nach welchem $\left(\frac{dv}{dp}\right)_{\alpha+\varepsilon} - \left(\frac{dv}{dp}\right)_{\alpha-\varepsilon} = -4\pi k$ ist. Bei unserer Fläche, die eine Kugelfläche ist, wollen wir zum Anfangspunkt der p den Mittelpunkt der Kugel nehmen. Dann wird $\alpha = R$, während p mit dem *radius vector* ϱ zusammenfällt, so dass man hat:

$$\left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_{R+\varepsilon} - \left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_{R-\varepsilon} = -4\pi k;$$

k ist die Dichtigkeit an der Stelle, wo der Radius R, welcher den Winkeln ϑ, φ entspricht, die Fläche trifft. Der Ausdruck $\left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_{R+\varepsilon}$ muss der Reihe entnommen werden, die für $\varrho > R$ gilt, der Ausdruck $\left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_{R-\varepsilon}$ der anderen Reihe, die für $\varrho < R$ gilt. Zunächst hat man

$$\left.\begin{aligned} &\text{wenn } \varrho < R \text{ ist:} \\ &\frac{dv}{d\varrho} = \sum_0^\infty n \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n-1} \int\int k' P_n (\cos \omega) \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \\ &\text{wenn } \varrho > R \text{ ist:} \\ &\frac{dv}{d\varrho} = -\sum_0^\infty (n+1) \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+2} \int\int k' P_n (\cos \omega) \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Es entsteht die Frage, ob diese Reihen convergiren. Wir wissen, dass die Reihen für v, aus denen diese durch Diffe-

rentiation entstanden sind, convergiren, so lange in der einen $\varrho < R$, in der anderen $\varrho > R$ ist. Nun lässt sich leicht zeigen, dass eine solche Reihe auch convergirend bleibt, wenn sie beliebig viele Male differenzirt wird. Die Reihe

$$a_0 + a_1 x + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdot$$

convergire, so lange $x < 1$: dann convergirt auch ihr Differentialquotient

$$a_1 + 2a_2 x + \cdots\cdot + n a_n x^{n-1} + \cdots\cdot$$

so lange $x < 1$. Die Coefficienten werden freilich sehr vergrössert, aber das hindert nicht, dass die Reihe dennoch convergirt.[19]) Mit der Convergenz unserer Reihen (1) für den Fall, dass ϱ resp. kleiner oder grösser als R ist, ist uns aber wenig geholfen; wir wollen ausmitteln, welchen Grenzen sich die beiden Ausdrücke (1) für $\frac{dv}{d\varrho}$ nähern, wenn sich ϱ dem R nähert. Würden unsere beiden Reihen noch convergiren, wenn man in beiden $\varrho = R$ setzt? Das ist schwer einzusehen. Aber wenn das auch nachgewiesen wäre, so bliebe noch eine andere Frage, ob nämlich eine nach Potenzen von α fortschreitende Reihe, die convergirt für $\alpha = 1$, bis $\alpha = 1$ stetig ist.

Als Beispiel dafür, dass nicht jede Reihe, die convergent ist, so lange α ein echter Bruch ist, auch bis $\alpha = 1$ incl. convergirt, diene die durch Entwicklung des Quotienten $\frac{1}{1+\alpha}$ entstandene Reihe $1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 - \cdots$ Dieselbe convergirt, so lange α ein, wenn auch noch so wenig, von 1 verschiedener echter Bruch ist; für $\alpha = 1$ würde die Reihe werden $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, convergirt also nicht mehr. Um die zweite Frage zu erläutern, nehmen wir die Reihe

$$1 + \frac{\alpha}{1^2} + \frac{\alpha^2}{2^2} + \cdots + \frac{\alpha^n}{n^2} + \cdots$$

Dieselbe convergirt bis $\alpha = 1$ incl. Hätten wir die Grenze auszumitteln, der sich diese Reihe nähert, wenn α sich der Einheit nähert, wären wir da berechtigt, den Werth zu nehmen, den wir bekämen, wenn wir $\alpha = 1$ setzten? Es wäre doch noch nöthig nachzuweisen, dass sie stetig ist bis

$\alpha = 1$. Denn es giebt in der That Reihen, die unstetige Functionen sind, z. B. die Reihe

$$\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots.$$

Der Werth derselben ist gleich $\frac{1}{2}x$, so lange x zwischen $-\pi$ und π excl. liegt. Der Werth, dem diese Reihe sich nähert, während sich x der Zahl π nähert, ist somit $\frac{1}{2}\pi$, während die Reihe, wenn ich für x geradezu die Zahl π setzen wollte, den Werth 0 annehmen würde. Doch etwas Aehnliches kann sich niemals ereignen bei Reihen, *die nach Potenzen geordnet sind*: solche Reihen bleiben stetig, so lange sie convergent bleiben, wie Abel[20]) zuerst nachgewiesen hat. Wir lassen den Beweis dieser Behauptung folgen.

Behauptet wird also Folgendes:

Wenn die Reihe

$$T = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n + \cdots$$

noch für $\alpha = 1$ convergirt, d. h. wenn die Summe

$$s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

mit wachsendem n sich einem festen Werth B nähert ($\lim s_n = B$), so sind wir gewiss, dass der Werth, den die Reihe T annimmt für ein α, welches unendlich wenig unter 1 liegt, von jenem festen Werth B unendlich wenig verschieden ist.

Beweis. Da offenbar

$$a_0 = s_0\,,\ a_1 = s_1 - s_0\,,\ a_2 = s_2 - s_1 \text{ u. s. w.,}$$

so ist

$$T = s_0 + (s_1 - s_0)\alpha + (s_2 - s_1)\alpha^2 + \cdots + (s_{n-1} - s_{n-2})\alpha^{n-1} + \cdots$$
$$= (1-\alpha)s_0 + \alpha(1-\alpha)s_1 + \alpha^2(1-\alpha)s_2 + \cdots + \alpha^{n-1}(1-\alpha)s_{n-1} + \cdots$$

Um sich zu überzeugen, dass letztere Umformung erlaubt ist, muss man nachweisen, dass diese beiden Summen um etwas verschieden sind, das im Unendlichen Null wird. Die Summe der n ersten Glieder ist bei der zweiten Reihe um $-s_{n-1}\alpha^n$ grösser als bei der ersten; dies ist aber ein Ausdruck, der mit wachsendem n verschwindet: mithin ist die Umformung legitim. Hat man eine nach Potenzen von α geordnete Reihe, die aus unendlich vielen Gliedern besteht,

und will wissen, was daraus wird, wenn sich α der Einheit nähert, so kann man das erreichen, indem man die Reihe in zwei Theile zerlegt, so aber dass der Einschnitt selbst sich immer ändert, während α der Einheit näher rückt. Wir schneiden die Reihe für T beim n^{ten} Gliede ein, nennen den ersten Abschnitt U, den zweiten V, so haben wir $T = U + V$. Wir können uns so einrichten, dass das U sich der Null nähert, und V einer leicht zu übersehenden Grenze. Dem U lässt sich diese Form geben:

$$U = (1 - \alpha)(s_0 + s_1\alpha + \cdots + s_{n-1}\alpha^{n-1}).$$

Da s_n sich einer festen Grenze B nähert, so muss das grösste der Glieder $s_0, s_1 \cdots s_n$ sich schliesslich einer festen Constanten nähern: nennen wir letztere k, so ist

$$U < (1 - \alpha)\, nk.$$

Wir richten uns so ein mit dem Einschneiden, dass U sich der Null nähert; $1 - \alpha = \varepsilon$ soll unendlich klein werden; da nun $U < n\varepsilon k$, so nähert sich U der Null, wenn wir n, während ε abnimmt, so langsam wachsen lassen, dass $n\varepsilon$ unendlich abnimmt (das kann auf 100000 Arten geschehen).

Es bleibt V zu untersuchen. Es ist

$$V = (1 - \alpha)\,\alpha^n\,(s_n + \alpha s_{n+1} + \alpha^2 s_{n+2} + \cdots).$$

Offenbar liegt die Summe

$$s_n + \alpha s_{n+1} + \alpha^2 s_{n+2} + \cdots.$$

zwischen dem Product aus dem grössten s in die Summe $1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots$ und dem Product aus dem kleinsten s in dieselbe Summe; wir können daher sagen, jene Summe sei gleich $\sigma\,(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots)$, wo σ enthalten ist zwischen dem Maximum und Minimum der Werthe $s_n, s_{n+1} \cdots$. Wächst n, so fallen Maximum und Minimum, also auch σ mit B zusammen. Also ist

$$\lim V = B \lim \left[\alpha^n (1 - \alpha)(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots)\right] = B \lim \alpha^n.$$

Bezeichnen wir das Product $n\varepsilon$ durch χ, so ist

$$\alpha^n = (1 - \varepsilon)^n = \left((1 - \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right)^{\chi},$$

mithin

$$\lim \alpha^n = \left(\lim\,(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right)^{\lim \chi}.$$

Da nun bekanntlich $\lim (1 - \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{1}{e}$, wo e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, d. i. die Zahl 2,718 ⋯, bedeutet, und $\lim \chi$ nach der Voraussetzung 0 ist, so hat man $\lim \alpha^n = \left(\frac{1}{e}\right)^0 = 1$; und folglich $\lim V$, also auch $\lim T = B$.

Wären wir also sicher, dass die Reihen

$$\varrho < R : \frac{dv}{d\varrho} = \sum n \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n U_n$$

$$\varrho > R : \frac{dv}{d\varrho} = -\sum (n+1) \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{n+2} U_n,$$

wo der Kürze wegen

$$\iint k' P_n (\cos \omega) \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' = U_n$$

gesetzt ist, noch convergiren für $\varrho = R$, so wäre die Grenze von $\frac{dv}{d\varrho}$ für ein ϱ, das sich vom Mittelpunkt her dem R nähert,

$$\left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_{R-\varepsilon} = \sum n U_n,$$

und für ein ϱ, das sich von aussen her dem R nähert,

$$\left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_{R+\varepsilon} = -\sum (n+1) U_n.$$

Nun wissen wir aber, dass

$$\left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_{R+\varepsilon} - \left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_{R-\varepsilon} = -4\pi k$$

ist: es wäre dann also

$$\Sigma (2n+1) U_n = 4\pi k,$$

oder

$$k = \frac{\Sigma (2n+1) U_n}{4\pi}.$$

Hier ist k die für die ganze Oberfläche der Kugel gegebene Dichtigkeit: diese Function hätten wir dargestellt in Form einer unendlichen Reihe, oder: wir hätten eine Formel für die Darstellung einer beliebigen Function, die für alle Punkte einer Kugeloberfläche gegeben ist, in Form einer unendlichen Reihe:

$$f(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \sum_0^\infty (2n+1) \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega) \sin\vartheta' d\vartheta'.$$

Dass man solche Reihen Kugelfunctionreihen nennt, da die einzelnen Glieder derselben sogenannte Kugelfunctionen sind, mag gleich hier bemerkt werden: die genaue Definition der Kugelfunctionen erfolgt erst später. Die Kugelfunctionreihen sind in der mathematischen Physik von der grössten Wichtigkeit. (Den Beweis[21]) der Convergenz der Reihen für $\frac{dv}{d\varrho}$, wenn $\varrho = R$, siehe *Crelle's* Journal, Bd. 17.)

Was den Bau der einzelnen Glieder der Entwicklung von $f(\vartheta, \varphi)$ in eine Kugelfunctionreihe betrifft, so ist das allgemeine Glied eine ganze Function von $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$, in deren einzelnen Summanden die Summe der Exponenten n, $n-2$, $n-4\cdots\cdot$ ist. Denn es war

$$P_n(\cos\omega) = A\cos\omega^n + B\cos\omega^{n-2} + \cdots\cdots,$$

und

$$\cos\omega = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi')$$
$$= \cos\vartheta'\cos\vartheta + \sin\vartheta'\cos\varphi'\sin\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta'\sin\varphi'\sin\vartheta\sin\varphi.$$

Der letzte Ausdruck ist eine lineare Function von $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$, in welcher $\cos\vartheta'$, $\sin\vartheta'\cos\varphi'$, $\sin\vartheta'\sin\varphi'$ Coefficienten sind; von demselben ist die n^{te}, $(n-2)^{\text{te}}\cdots\cdot$ Potenz zu bilden. Wir bekommen also für P einen Complex von Gliedern von der Form

$$L\cos\vartheta^\alpha(\sin\vartheta\cos\varphi)^\beta(\sin\vartheta\sin\varphi)^\gamma,$$

wo $\alpha + \beta + \gamma$ entweder n, oder $n-2$, oder $n-4\cdots\cdots$ ist. Um hieraus die Entwicklung von $f(\vartheta, \varphi)$ zu erhalten, ist jedes dieser Glieder noch zu multipliciren mit $\sin\vartheta' f(\vartheta', \varphi') d\vartheta' d\varphi'$, und darauf nach ϑ' und φ' zu integriren, wodurch nur die Coefficienten L jenes Complexes geändert werden.

§. 18.

Die wichtigsten Eigenschaften der Kugelfunctionen hängen mit der Gleichung $\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = 0$ zusammen, in welcher v das Potential ausserhalb der wirkenden Masse be-

zeichnet. Es ist von Wichtigkeit, diese Gleichung auf Polarcoordinaten zu beziehen, was zwar auf dem gewöhnlichen Wege geschehen kann, aber eine lästige Rechnung erfordert. Um letztere zu vermeiden, wollen wir uns eines anderen Princips bedienen. Wir machen wieder von dem in §. 7. bewiesenen Hilfssatz Gebrauch. Hat man einen zusammenhängenden Raum, in welchem u und w, so wie ihre Differentialquotienten stetige Functionen der drei rechtwinkligen Coordinaten sind, so war:

$$\int\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)w\,dT=$$

$$\int w\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha+\frac{du}{dy}\cos\beta+\frac{du}{dz}\cos\gamma\right)ds-\int\left(\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dy}\frac{dw}{dy}+\frac{du}{dz}\frac{dw}{dz}\right)dT.$$

Wir setzen $w=1$, und machen die Annahme, dass u innerhalb des zusammenhängenden Raumes so beschaffen ist, dass das Trinom $\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}$ gleich Null ist: dadurch geht die vorstehende Gleichung in die folgende einfachere über

$$\int\left(\frac{du}{dx}\cos\alpha+\frac{du}{dy}\cos\beta+\frac{du}{dz}\cos\gamma\right)ds=0.$$

Für das Potential v einer beliebigen Masse findet die eben gemachte Annahme statt innerhalb eines beliebigen Raumes, der ganz ausserhalb jener Masse liegt; es ist demnach

$$\int\left(\frac{dv}{dx}\cos\alpha+\frac{dv}{dy}\cos\beta+\frac{dv}{dz}\cos\gamma\right)ds=0. \qquad (1)$$

Dies Integral ist auszudehnen über eine beliebige in sich zurückkehrende Fläche, die ganz ausserhalb jener Masse liegt; α, β, γ sind die Winkel, welche die auf dem jedesmaligen Flächenelement ds nach aussen errichtete Normale mit den Coordinatenaxen bildet. Der Complex

$$\frac{dv}{dx}\cos\alpha+\frac{dv}{dy}\cos\beta+\frac{dv}{dz}\cos\gamma$$

ist also nach §. 15. die Derivirte des Potentials in irgend einem Punkt der Fläche *in der Richtung der Normale*; bezeichnen wir diese Derivirte durch $\left(\frac{dv}{dp}\right)_0$, so lässt sich die Gleichung (1) auch so schreiben:

$$\int \left(\frac{dv}{dp}\right)_0 ds = 0. \tag{2}$$

Die Gleichung (2) ist nichts anderes als die Gleichung

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0, \tag{3}$$

in einer geschmeidigeren Form, und lässt sich auf jedes Coordinatensystem transformiren.

Um die Gleichung (3) auf Polarcoordinaten zu transformiren, wenden wir die Gleichung (2) auf den Fall an, dass die in sich zurückkehrende Fläche, über welche die Integration in (2) auszudehnen ist, die Oberfläche irgend eines auf Polarcoordinaten bezogenen Raumelementes sei, welches ganz ausserhalb der wirkenden Masse liegt. Die drei unendlich kleinen Linien, welche die in einer Ecke zusammenstossenden Kanten desselben bilden, sind $d\varrho$, $\varrho d\vartheta$, $\varrho \sin\vartheta d\varphi$, und stehen senkrecht auf einander. Wir bilden zunächst die Derivirten von v in dem Punkt (ϱ, ϑ, φ) nach den Richtungen dieser drei Linien. Die Derivirte in der Richtung des *radius vector* ist $\frac{dv}{d\varrho}$; in der Richtung, wo bloss ϑ sich ändert, $\dfrac{\frac{dv}{d\vartheta} d\vartheta}{\varrho d\vartheta} = \frac{1}{\varrho}\frac{dv}{d\vartheta}$; und in der dritten Richtung, wo bloss φ sich ändert: $\dfrac{\frac{dv}{d\varphi} d\varphi}{\varrho \sin\vartheta d\varphi} = \frac{1}{\varrho \sin\vartheta}\frac{dv}{d\varphi}$. Das auf der linken Seite der Gleichung (2) stehende Integral $\int \left(\frac{dv}{dp}\right)_0 ds$ besteht in unserem Fall nur aus sechs Elementen, die den sechs rechteckigen Flächenelementen ds entsprechen, welche das Raumelement begrenzen; je zwei derselben liegen einander gegenüber. Eins derselben ist das aus den Seiten $\varrho d\vartheta$ und $\varrho \sin\vartheta d\varphi$ gebildete Rechteck, wird also ausgedrückt durch $\varrho^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$; dasselbe ist zu multipliciren mit der Derivirten von v in der Richtung der nach *aussen* auf demselben errichteten Normale, d. i. mit $-\frac{dv}{d\varrho}$. Eins der sechs Elemente des Integrals (2) ist mithin $-\frac{dv}{d\varrho}\varrho^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$. Dasjenige, welches dem gegenüberliegenden Flächenelement ent-

spricht, wird sich von dem vorigen erstens dadurch unterscheiden, dass statt ϱ zu setzen ist $\varrho + d\varrho$, indem ϑ und φ unverändert bleiben; dann aber auch dadurch, dass es statt des negativen Vorzeichens das positive hat, indem das Flächenelement immer mit der Derivirten in der Richtung der nach *aussen* gerichteten Normale zu multipliciren ist. Die Summe dieser beiden Elemente des Integrals wird also das partielle Differential nach ϱ von $\frac{dv}{d\varrho}\varrho^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ sein, d. i. $\sin\vartheta d\vartheta d\varphi d\varrho \frac{d\left(\varrho^2 \frac{dv}{d\varrho}\right)}{d\varrho}$. Ganz ähnlich ist es mit den beiden anderen Paaren von Elementen, die gegenüberliegenden Flächen entsprechen. Das Flächenelement $\varrho d\vartheta d\varrho$ ist zu multipliciren mit $-\frac{1}{\varrho \sin\vartheta}\frac{dv}{d\varphi}$, woraus das Integralelement $-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{dv}{d\varphi}d\vartheta d\varrho$ entsteht; bei dem Element, welches der gegenüberliegenden Fläche entspricht, ändert sich bloss φ um $d\varphi$, und das Vorzeichen, so dass die Summe dieser beiden Elemente das partielle Differential von $\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{dv}{d\varphi}d\vartheta d\varrho$ nach φ ist, d. i. $\frac{1}{\sin\vartheta}d\vartheta d\varrho d\varphi \frac{d^2 v}{d\varphi^2}$. Auf ähnliche Weise erhält man als Beitrag, den das dritte Elementenpaar zum Integral (2) liefert: $\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{dv}{d\vartheta}\sin\vartheta\right)d\vartheta d\varphi d\varrho$. Durch Addition entsteht, wenn man den gemeinsamen Factor $d\vartheta d\varphi d\varrho$ fortlässt, aus (2) die Gleichung:

$$\sin\vartheta \frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^2 \frac{dv}{d\varrho}\right) + \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{dv}{d\vartheta}\sin\vartheta\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 0.$$

Dies ist die transformirte Gleichung, die man auch auf dem gewöhnlichen Wege bekommen kann, indem man in (3) statt der rechtwinkligen Coordinaten Polarcoordinaten einführt. Das erste Glied der transformirten Gleichung kann man anders schreiben; es ist nämlich

$$\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^2 \frac{dv}{d\varrho}\right) = \varrho^2 \frac{d^2 v}{d\varrho^2} + 2\varrho\frac{dv}{d\varrho} = \varrho\left(\varrho\frac{d^2 v}{d\varrho^2} + 2\frac{dv}{d\varrho}\right) = \varrho\frac{d^2(\varrho v)}{d\varrho^2}.$$

Substituirt man den letzten Werth statt $\frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^2 \frac{dv}{d\varrho}\right)$ in der vorigen Gleichung, so hat man:

$$\sin\vartheta\,\varrho\,\frac{d^2(\varrho v)}{d\varrho^2}+\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{dv}{d\vartheta}\sin\vartheta\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d^2v}{d\varphi^2}=0.$$

In dieser Gleichung liegt das eigentliche Fundament der Theorie der Kugelfunctionen.

§. 19.

Ein Massenelement irgend einer Masse M sei μ'; den Ort desselben bestimmen wir durch Polarcoordinaten $\varrho', \vartheta', \varphi'$. Der Punkt, für den das Potential genommen werden soll, sei $(\varrho, \vartheta, \varphi)$; wir setzen voraus, dass derselbe ausserhalb der Masse liege. Der Beitrag zum Potential, den jenes Element μ' liefert, ist das Massenelement μ' dividirt durch seine Entfernung r vom Punkt $(\varrho, \vartheta, \varphi)$, also: $\frac{\mu'}{\sqrt{(\varrho'^2-2\varrho\varrho'\cos\omega+\varrho^2)}}$, mithin ist

$$v=S\frac{\mu'}{\sqrt{(\varrho'^2-2\varrho\varrho'\cos\omega+\varrho^2)}},$$

wo sich das Summenzeichen S auf sämmtliche Massenelemente bezieht. Der Pol, d. i. der Punkt, von wo die ϱ gezählt werden, soll nicht in der Masse liegen. Nennen wir die Entfernung des dem Pol am nächsten liegenden Massentheilchens vom Pol R, so wird $R>0$ sein, und jedes $\varrho' \overline{>} R$; nennen wir ferner die Entfernung des entferntesten Massentheilchens vom Pol R', dann wird jedes $\varrho' \overline{<} R'$ sein. Ist nun $\varrho < R$, so lässt sich v in eine nach positiven Potenzen des *radius vector* ϱ fortschreitende Reihe entwickeln, und ist $\varrho > R'$, in eine nach negativen Potenzen fortschreitende Reihe.

I. $\varrho < R$. In diesem Fall ist nach §. 16.

$$\frac{\mu'}{r}=\frac{\mu'}{\varrho'\sqrt{\left(1-2\frac{\varrho}{\varrho'}\cos\omega+\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^2\right)}}=\sum P_n(\cos\omega)\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^n\frac{\mu'}{\varrho'},$$

mithin

$$v=S\frac{\mu'}{r}=\sum\varrho^n\,S\,P_n(\cos\omega)\,\frac{\mu'}{\varrho'^{n+1}}.$$

Um sich zu überzeugen, dass diese Reihe convergirt, setze man in dem Coefficienten von ϱ^n statt $P_n(\cos\omega)$ die Einheit und R statt ϱ', wodurch derselbe vergrössert wird und

übergeht in $\frac{S\mu'}{R^{n+1}} = \frac{M}{R^{n+1}}$; das allgemeine Glied unserer Reihe ist folglich kleiner als $\frac{M}{R}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^n$, also unsere Reihe convergirt. Bezeichnen wir die zweite Summe $S\, P_n(\cos\omega)\,\frac{\mu'}{\varrho'^{n+1}}$ durch X_n, so haben wir

$$v = \Sigma\, X_n \varrho^n.$$

Der Ausdruck X_n ist offenbar eine ganze rationale Function von $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$; und zwar ist die Summe der Exponenten von $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$ in den einzelnen Gliedern dieser Function n, $n-2$ u. s. w. Statt v wollen wir die Reihe $\Sigma X_n \varrho^n$ in der Gleichung

$$\sin\vartheta\,\varrho\,\frac{d^2(\varrho v)}{d\varrho^2} + \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{dv}{d\vartheta}\sin\vartheta\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 0 \qquad (1)$$

substituiren. Zunächst ist $\varrho v = \Sigma X_n \varrho^{n+1}$, folglich

$\frac{d(\varrho v)}{d\varrho} = \Sigma\,(n+1)\,X_n\varrho^n$, und $\frac{d^2(\varrho v)}{d\varrho^2} = \Sigma\, n(n+1)\,X_n\varrho^{n-1}$.

Mithin ist das erste Glied der ersten Seite der Gleichung (1)

$$\sin\vartheta\,\varrho\,\frac{d^2(\varrho v)}{d\varrho^2} = \Sigma\, n\,(n+1)\,X_n\sin\vartheta\,\varrho^n.$$

Ferner ist $\frac{dv}{d\vartheta} = \Sigma\varrho^n\frac{dX_n}{d\vartheta}$, folglich $\sin\vartheta\,\frac{dv}{d\vartheta} = \Sigma\varrho^n\frac{dX_n}{d\vartheta}\sin\vartheta$, mithin das zweite Glied der ersten Seite der Gleichung (1)

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{dv}{d\vartheta}\right) = \sum\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{dX_n}{d\vartheta}\right)\varrho^n.$$

Das dritte Glied, nämlich $\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d^2v}{d\varphi^2}$, wird $\sum\frac{d^2X_n}{d\varphi^2}\,\frac{1}{\sin\vartheta}\,\varrho^n$. Der Coefficient von ϱ^n, den man erhält, wenn man diese drei Werthe in der Gleichung (1) substituirt, muss gleich Null sein; es genügt mithin der Coefficient X_n in der Entwicklung des Potentials nach positiven Potenzen von ϱ dieser partiellen Differentialgleichung:

$$n\,(n+1)\sin\vartheta\,X_n + \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{dX_n}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d^2X_n}{d\varphi^2} = 0. \quad (2)$$

II. $\varrho > R'$. Es war

$$v = S\frac{\mu'}{r} = S\frac{\mu'}{\sqrt{(\varrho^2 - 2\varrho\varrho'\cos\omega + \varrho'^2)}}.$$

Jetzt ist diese Wurzel nach negativen Potenzen entwickelbar:

$$v = S \frac{\mu'}{\varrho \sqrt{\left(1 - 2\frac{\varrho'}{\varrho}\cos\omega + \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2\right)}} = \sum \frac{1}{\varrho^{n+1}} S \mu' \varrho'^n P_n (\cos\omega).$$

Setzen wir 1 statt P_n (cos ω) und R' statt ϱ', so vergrössern wir; die Summe $S\mu'\varrho'^n P_n$ (cos ω) ist also kleiner als MR'^n, folglich das allgemeine Glied unserer Entwicklung von v kleiner als $\frac{M}{\varrho}\left(\frac{R'}{\varrho}\right)^n$, mithin die Entwicklung convergent. Nennen wir jene Summe wieder X_n, so ist

$$v = \sum \frac{X_n}{\varrho^{n+1}},$$

wo X_n wieder eine ganze rationale Function von cos ϑ, sin ϑ cos φ, sin ϑ sin φ ist, in deren einzelnen Gliedern die Summe der Exponenten dieser Grössen n, $n-2\cdots$ ist. Das Merkwürdige ist nun, dass dieser Coefficient X_n wieder denselben Charakter hat wie der Coefficient X_n der vorigen Entwicklung. Denn wenn wir für v jetzt die Reihe $\sum \frac{X_n}{\varrho^{n+1}}$ in der Gleichung (1) substituiren, so entsteht genau dieselbe Differentialgleichung wie vorhin, indem das erste Glied jetzt

$$n(n+1)\sin\vartheta\, X_n \frac{1}{\varrho^{n+1}}$$

wird. Also jene Differentialgleichung (2) gilt sowohl für den Fall einer Entwicklung nach positiven wie nach negativen Potenzen des ϱ.

Die Gleichung (2) stellen wir als Definition der Kugelfunctionen auf:

Jede ganze, rationale, geschlossene Function von cos ϑ, sin ϑ cos φ, sin ϑ sin φ, *die dieser partiellen Differentialgleichung genügt*

$$n(n+1)\sin\vartheta\, X_n + \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{dX_n}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d^2 X_n}{d\varphi^2} = 0,$$

soll eine Kugelfunction n^{ter} *Ordnung genannt werden.*

Demnach sind die Coefficienten einer Potentialentwicklung immer Kugelfunctionen, mag die Entwicklung nach positiven oder nach negativen Potenzen des *radius vector* fortschreiten.

Wir wollen eine Kugelfunction irgend einer Ordnung

immer mit einem der Buchstaben X, Y, Z, T, U bezeichnen, denen wir, wenn Kugelfunctionen verschiedener Ordnung zu unterscheiden sind, einen Index anhängen, der die Ordnung angiebt, so dass z. B. X_n irgend eine Kugelfunction n^{ter}, Y_m irgend eine m^{ter} Ordnung bezeichnet.

§. 20.

Die Kugelfunctionen haben ihren Namen mit vollem Recht, weil sie die grösste Aehnlichkeit haben mit den Kreisfunctionen; d. h. mit Functionen einer Veränderlichen φ, deren allgemeines Glied ist

$$s = a \cos n\varphi + b \sin n\varphi.$$

Dieser Ausdruck genügt z. B. der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + n^2 s = 0,$$

ähnlich wie eine Kugelfunction der Differentialgleichung (2) §. 19. genügt. Man kann ferner sagen: so wie $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ eine ganze Function von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ ist, während $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punktes der Peripherie eines Kreises mit dem Radius 1 sind, ist eine Kugelfunction eine ganze Function der Grössen $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\varphi$, $\sin\vartheta\sin\varphi$, welche die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer Kugeloberfläche mit dem Radius 1 sind. Eine dritte Analogie zwischen den Kreisfunctionen und Kugelfunctionen ist folgende. Wenn man das Product zweier Kreisfunctionen verschiedener Ordnung, z. B. $a\cos n\varphi + b\sin n\varphi$, $c\cos m\varphi + d\sin m\varphi$ mit dem Element $d\varphi$ der Kreisperipherie multiplicirt, und dann über die ganze Kreisperipherie integrirt, so ist der Werth des Integrals stets gleich Null. Eine ganz ähnliche Eigenschaft besitzen die Kugelfunctionen; dieselbe lautet:

1. Wenn man das Product zweier Kugelfunctionen verschiedener Ordnung mit dem Element der Kugelfläche multiplicirt, und dann über die ganze Kugelfläche integrirt, so ist der Werth des Integrals stets gleich Null.

Diese Fundamentaleigenschaft der Kugelfunctionen, die auch durch folgende Gleichung ausgedrückt werden kann:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} X_n Y_m \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 0,$$

lässt sich beweisen, indem man bloss auf die Definition der Kugelfunctionen Rücksicht nimmt, welcher zufolge

$$o = n(n+1)\sin\vartheta X + \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{dX}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d^2X}{d\varphi^2} \qquad (1)$$

$$o = m(m+1)\sin\vartheta Y + \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{dY}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d^2Y}{d\varphi^2} \qquad (2)$$

ist. Es wird sich nämlich ergeben, dass jenes Doppelintegral gleich ist dem Product aus sich selbst in eine von 1 verschiedene Constante; daraus wird dann freilich folgen, dass dasselbe nur den Werth Null haben kann.

Aus (1) folgt

$$n(n+1)\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} XY \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$-\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dX}{d\vartheta}\right)d\vartheta\, d\varphi - \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sin\vartheta}\, Y\frac{d^2X}{d\varphi^2}\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Man beachte, dass $\frac{d^2X}{d\varphi^2}$ den Factor $\sin\vartheta$ hat, so dass $\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d^2X}{d\varphi^2}$ für $\vartheta = 0$ nicht unendlich wird. Den ersten Ausdruck der zweiten Seite integriren wir theilweise nach ϑ, den zweiten nach φ. Es ist

$$\int Y\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dX}{d\vartheta}\right)d\vartheta = Y\frac{dX}{d\vartheta}\sin\vartheta - \int \sin\vartheta\frac{dX}{d\vartheta}\frac{dY}{d\vartheta}\, d\vartheta, \qquad (3)$$

folglich

$$\int_0^{\pi} Y\frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{dX}{d\vartheta}\right)d\vartheta = -\int_0^{\pi}\sin\vartheta\frac{dX}{d\vartheta}\frac{dY}{d\vartheta}\, d\vartheta. \qquad (4)$$

Ferner ist

$$\int Y\frac{d^2X}{d\varphi^2}\, d\varphi = Y\frac{dX}{d\varphi} - \int\frac{dX}{d\varphi}\frac{dY}{d\varphi}\, d\varphi.$$

Das Glied vor dem Integralzeichen wird nicht, wie in (3), für die beiden Grenzwerthe, $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$, gleich Null, hat aber doch für beide denselben Werth, weil es eine ganze Function von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ist. Folglich ist

$$\int_0^{2\pi} Y \frac{d^2 X}{d\varphi^2} d\varphi = -\int_0^{2\pi} \frac{dX}{d\varphi}\frac{dY}{d\varphi} d\varphi. \tag{5}$$

Substituirt man in (1) die rechten Seiten der Gleichungen (4) und (5) statt der linken, so entsteht

$$n(n+1)\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} XY \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dX}{d\vartheta}\frac{dY}{d\vartheta} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi + \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{dX}{d\varphi}\frac{dY}{d\varphi}\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Behandelt man die Gleichung (2) ebenso, so bekommt man eine Gleichung, deren erste Seite

$$m(m+1)\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} XY \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

ist, während ihre zweite Seite genau mit der zweiten Seite der vorstehenden Gleichung übereinstimmt. Wenn also m und n verschieden sind, so muss

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} X_n Y_m \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = 0,$$

oder, wenn man das Element $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ einer Kugelfläche mit dem Radius 1 durch $d\sigma$ bezeichnet,

$$\int X_n Y_m d\sigma = 0$$

sein, das Integral über die ganze Kugelfläche ausgedehnt.

2. Es ist klar, dass eine Kugelfunction irgend einer Ordnung eine derselben Ordnung bleibt, wenn man sie mit einer Constanten multiplicirt.

3. Wenn man zwei Kugelfunctionen derselben Ordnung addirt, so ist die Summe wieder eine Kugelfunction derselben Ordnung.

4. Hat man eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung

$$X = \cdots + L \cos\vartheta^{\alpha} (\sin\vartheta \cos\varphi)^{\beta} (\sin\vartheta \sin\varphi)^{\gamma} + \cdots,$$

deren Coefficienten von irgend einer Grösse λ abhängen, dann kann man die Kugelfunction zwischen beliebigen festen Grenzen, die nicht von ϑ und φ abhängen, nach λ integriren und erhält wieder eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung.

Dies liegt auf der Hand; denn es ist

$$n(n+1)\sin\vartheta X + \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{dX}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d^2 X}{d\varphi^2} = 0;$$

folglich ist auch der Ausdruck

$$\int_p^q d\lambda\left(n(n+1)\sin\vartheta X + \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{dX}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d^2X}{d\varphi^2}\right)$$

oder, was dasselbe ist

$$n(n+1)\sin\vartheta\int_p^q X d\lambda + \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta\,\frac{d\int_p^q X d\lambda}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d^2\int_p^q X d\lambda}{d\varphi^2} = 0.$$

Ueberall, wo früher X stand, steht jetzt $\int_p^q X d\lambda$: das ist also wieder eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung.

5. Es ist

$$Y_m = \frac{2m+1}{4\pi}\int d\sigma'\; Y_m' P_m(\cos\omega),$$

das Integral über die ganze Kugeloberfläche ausgedehnt.

Diese wichtige Eigenschaft der Kugelfunctionen lässt sich folgendermassen beweisen. Wir fanden im vorhergehenden Paragraphen, dass jeder Coefficient einer Potentialentwicklung eine Kugelfunction ist. Nun haben wir aber ein Potential, dessen Entwicklung wir kennen. Nehmen wir nämlich nur Ein Massenelement, dessen Masse 1 sein soll, während seine Entfernung vom Pol 1 sei, dann ist das Potential keine Summe, sondern nur ein Glied, welches, wenn $\varrho < 1$, nach positiven Potenzen von ϱ entwickelbar ist, nämlich:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2\varrho\cos\omega+\varrho^2)}} = \sum P_n(\cos\omega)\varrho^n.$$

Also $P_n(\cos\omega)$ ist auch eine Kugelfunction, und zwar eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung (§. 19.), in deren Coefficienten zwei willkürliche Grössen enthalten sind, die Winkel ϑ' und φ'. Es ist daher nach 1., wenn X_m eine Kugelfunction m^{ter} Ordnung ist, und m nicht gleich n ist,

$$\int X_m P_n(\cos\omega)\,d\sigma = 0.$$

$P_n(\cos\omega)$ enthält die Winkel ϑ, φ und ϑ', φ' auf eine völlig symmetrische Weise, wegen

$$\cos\omega = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta'\cos\varphi' + \sin\vartheta\sin\varphi\sin\vartheta'\sin\varphi',$$

ist also auch eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung in Bezug auf ϑ' und φ'; folglich hat man auch

$$\int X_m' P_n(\cos\omega)\, d\sigma' = 0. \qquad (\alpha)$$

Nun fanden wir, dass eine beliebige Function zweier Veränderlichen $f(\vartheta, \varphi)$, wenn dieselbe für alle Punkte einer Kugeloberfläche gegeben ist, in eine gewisse Reihe entwickelt werden kann:

$$f(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\sum_0^\infty (2n+1)\int_0^\pi\int_0^{2\pi} d\vartheta'\, d\varphi' \sin\vartheta' P_n(\cos\omega) f(\vartheta', \varphi').$$

Es blieb freilich noch ein Zweifel in Bezug auf die Richtigkeit dieser Entwicklung, insofern der Nachweis ihrer Convergenz fehlte. Dieser Zweifel verschwindet, wenn wir für $f(\vartheta, \varphi)$ eine Kugelfunction setzen; denn in diesem Fall ist unsere Reihe gar keine Reihe mehr, sondern reducirt sich auf Ein Glied. Ist nämlich $f(\vartheta, \varphi) = Y_m$, so ist das allgemeine Glied

$$\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} d\vartheta'\, d\varphi' \sin\vartheta' P_n(\cos\omega)\, Y_m'.$$

Dieser Ausdruck ist nach (α) gleich Null, so lange n von m verschieden ist, so dass nur das eine Glied bleibt, wo $n = m$ ist. Wir haben also

$$Y_m = \frac{2m+1}{4\pi}\int d\sigma'\, Y_m' P_m(\cos\omega),$$

oder auch, wenn wir die gestrichenen Buchstaben mit den ungestrichenen verwechseln, wodurch P dasselbe bleibt,

$$Y_m' = \frac{2m+1}{4\pi}\int d\sigma\, Y_m P_m(\cos\omega).$$

6. Bisher haben wir von den Kugelfunctionen bloss verlangt, dass sie eine ganze Function von den drei Ausdrücken ξ, η, ζ seien (zur Abkürzung setzen wir $\cos\vartheta = \xi$, $\sin\vartheta\cos\varphi = \eta$, $\sin\vartheta\sin\varphi = \zeta$) und der Differentialgleichung

(2) §. 19. genügen. Jetzt können wir einsehen, dass jede Kugelfunction m^{ten} Grades, auch wenn sie ursprünglich anders beschaffen sein sollte, so umgeformt werden kann, dass die Summe der Exponenten von ξ, η, ζ in keinem Gliede m überschreitet, und in den einzelnen Gliedern m, $m-2\cdots$ ist. Diese Umformung kann mit Hilfe der in 5. aufgestellten Gleichung

$$\frac{4\pi}{2m+1} Y_m = \int Y'_m P_m (\cos\omega)\, d\sigma'$$

bewerkstelligt werden. Denn P ist eine rationale ganze Function von ξ, η, ζ, in deren einzelnen Gliedern die Summe der Exponenten m, $m-2\cdots$ ist (§. 17.), und neue Exponenten können durch die auf der zweiten Seite jener Gleichung angedeuteten Operationen nicht hineinkommen. Dabei ist zu bemerken, dass eine Kugelfunction sehr wohl Glieder enthalten kann, in denen die Summe der Exponenten grösser als m ist. Hiervon wird man sich leicht überzeugen, wenn man bedenkt, dass ξ, η, ζ nicht unabhängig von einander sind, da $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ ist.

Von den unter 1. bis 6. bewiesenen Eigenschaften der Kugelfunctionen heben wir die beiden in 1. und 5. enthaltenen noch einmal besonders hervor, die durch die beiden Gleichungen

$$\int X_n Y_m d\sigma = 0$$

$$\int P_m Y_m d\sigma = \frac{4\pi}{2m+1} Y'_m$$

ausgedrückt sind. Diese zwei Sätze sind fundamental.

§. 21.

Ist $f(\vartheta, \varphi)$ eine von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$, und von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ willkürlich gegebene Function, und ist dieselbe für alle unendlich kleinen Veränderungen von ϑ und φ stetig, so ist (§. 17. und Anmerkungen 21.):

$$f(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\sum_0^\infty (2n+1)\int_0^\pi\int_0^{2\pi} d\vartheta' d\varphi' \sin\vartheta' f(\vartheta', \varphi')\, P_n(\cos\omega).$$

Der Factor P_n $(\cos\omega)$ in dem allgemeinen Glied

$$\frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta' d\varphi' \sin\vartheta' f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega)$$

dieser Reihe ist eine Kugelfunction $n$ter Ordnung (§. 20., 5.). Folglich ist auch $\frac{2n+1}{4\pi} \sin\vartheta' f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega)$ eine Kugelfunction derselben Ordnung (§. 20., 2.); daraus ergiebt sich weiter, dass auch jenes allgemeine Glied selbst eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung ist (§. 20., 4.). Wir können demnach sagen:

Eine jede von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$ und von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ willkürlich gegebene Function $f(\vartheta, \varphi)$, die für alle Aenderungen von ϑ und φ sich stetig ändert, ist immer in eine Kugelfunctionreihe entwickelbar, und zwar ist

$$f(\vartheta, \varphi) = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \cdots = \sum_0^{\infty} Z_n, \tag{1}$$

wo

$$Z_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega)\, d\sigma'$$

(die Integration über die ganze Oberfläche einer Kugel mit dem Radius 1 ausgedehnt) eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung ist.

Für die Folge ist es wichtig nachzuweisen, dass eine jede Function von der angegebenen Beschaffenheit, nur auf diese eine Art in eine Reihe von Kugelfunctionen entwickelbar ist. Existirte nämlich ausser jener Entwicklung von $f(\vartheta, \varphi)$ noch diese zweite

$$f(\vartheta, \varphi) = \Sigma U_n, \tag{2}$$

so würden wir durch Subtraction der Gleichung (2) von der Gleichung (1) eine Reihe erhalten, welche für alle Werthe von ϑ und φ, von 0 bis π und von 0 bis 2π resp., Null wäre:

$$\Sigma(Z_n - U_n) = \Sigma X_n = 0,$$

wo X_n nach §. 20., 3. wieder eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung sein würde. Wenn diese Gleichung für alle Werthe ϑ, φ, von 0 bis π und von 0 bis 2π resp., besteht, und wir die convergirende Reihe ΣX_n mit irgend einem Factor multipliciren, und das Product von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$, und von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ integriren, so muss auch das Re-

sultat dieser doppelten Integration Null sein. Wir multipliciren also beide Seiten der Gleichung

$$0 = X_0 + X_1 + \cdots + X_n + \cdots$$

mit $X_m d\sigma$, und integriren zwischen den angegebenen Grenzen, so entsteht:

$$0 = \int X_0 X_m d\sigma + \int X_1 X_m d\sigma + \cdots$$

Von allen Gliedern der zweiten Seite dieser Gleichung bleibt nach §. 20., 1. nur das eine Glied, in welchem $n = m$ ist; folglich hat man

$$0 = \int X_m^2 d\sigma.$$

Daraus folgt

$$X_m = 0, \text{ d. h. } U_n = Z_n.$$

§. 22.

Jede Kugelfunction n^{ten} Grades X_n ist ein particuläres Integral der partiellen Differentialgleichung (2) §. 19.

$$n(n+1)\sin\vartheta\, X_n + \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{dX_n}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d^2 X_n}{d\varphi^2} = 0. \quad (1)$$

Deshalb genügt das Product $X_n \varrho^n$ der Gleichung (§. 18.):

$$\sin\vartheta\, \varrho \frac{d^2(\varrho v)}{d\varrho^2} + \frac{d}{d\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{dv}{d\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 0.$$

Letztere Gleichung ist aber durch Transformation der Gleichung

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0 \quad (2)$$

entstanden, indem man statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z Polarcoordinaten $\varrho, \vartheta, \varphi$ einführte. Wenn wir also in $\varrho^n X_n$ die Polarcoordinaten durch rechtwinklige ersetzen, so werden wir ein particuläres Integral der Differentialgleichung (2) erhalten. Es ist aber

$$X_n \varrho^n = \Sigma L\, \varrho^n \xi^\alpha \eta^\beta \zeta^\gamma.$$

Diese Summe ist offenbar eine *homogene* Function der rechtwinkligen Coordinaten n^{ten} Grades, d. h. von der Beschaffenheit, dass die Summe der Exponenten von x, y, z in *allen* Gliedern n ist. Denn in den einzelnen Gliedern jener Summe ist (§. 20., 6.)

$$\alpha + \beta + \gamma = n,\ n - 2,\ n - 4 \cdots$$

Diejenigen Glieder nun, in welchen $\alpha + \beta + \gamma = n - 2$ ist, können wir, ohne ihren Werth zu verändern, mit $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ multipliciren, da dieses Aggregat $= 1$ ist; dadurch gehen dieselben aber in solche über, in welchen die Summe der Exponenten n ist. Ebenso multipliciren wir diejenigen Glieder jener Summe, in welchen $\alpha + \beta + \gamma = n - 4$ ist mit dem entwickelten Quadrate $(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2$ u. s. w. Wenn wir in der so transformirten Summe $\Sigma L \varrho^n \xi^\alpha \eta^\beta \zeta^\gamma$, wofür wir auch schreiben können $\Sigma L (\varrho\xi)^\alpha (\varrho\eta)^\beta (\varrho\zeta)^\gamma$ statt $\varrho\xi$, $\varrho\eta$, $\varrho\zeta$ resp. x, y, z setzen, so erhalten wir offenbar eine homogene Function von x, y, z. Wir können demnach sagen: Wenn wir eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung mit ϱ^n multipliciren, und alle Glieder dieses Productes durch rechtwinklige Coordinaten ausdrücken, so bekommen wir eine homogene Function n^{ten} Grades, die der Gleichung

$$\frac{d^2 v}{d x^2} + \frac{d^2 v}{d y^2} + \frac{d^2 v}{d z^2} = 0$$

genügt. Umgekehrt haben wir eine homogene Function von x, y, z, welche ein particuläres Integral dieser Gleichung ist, so bilden wir daraus eine Kugelfunction, wenn wir statt x, y, z setzen $\varrho\xi$, $\varrho\eta$, $\varrho\zeta$. Wir haben demnach die Aufsuchung der allgemeinsten Form einer Kugelfunction erleichtert: wir suchen die allgemeinste homogene Function Q von x, y, z auf, die der Gleichung $\frac{d^2 v}{d x^2} + \frac{d^2 v}{d y^2} + \frac{d^2 v}{d z^2} = 0$ genügt. Das Resultat ist auf der Stelle da; aber es ist wohl zu überlegen, wie man auf die einfachste Weise zum Ziel gelangt. Q kann so geschrieben werden:

$$Q = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_n x^n,$$

wo B_0, $B_1 \cdots B_n$ Functionen von y, z vom Grade $n, n-1, \cdots 0$ sind. Setzt man diesen Werth für Q in die Differentialgleichung (2) ein, so wird man leicht finden, dass das erste und zweite Polynom B_0 und B_1 beliebig bleiben, und dass die übrigen sich daraus mit Hilfe dieser Gleichungen bestimmen:

$$B_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2B_0}{dy^2}+\frac{d^2B_0}{dz^2}\right),\ B_3 = -\frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{d^2B_1}{dy^2}+\frac{d^2B_1}{dz^2}\right),$$

$$B_4 = -\frac{1}{3\cdot 4}\left(\frac{d^2B_2}{dy^2}+\frac{d^2B_2}{dz^2}\right) = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{d^4B_0}{dy^4}+2\frac{d^4B_0}{dy^2dz^2}+\frac{d^4B_0}{dz^4}\right)$$

u. s. f.

Wir müssen darauf sinnen, dass sich nicht solche recurrirenden Beziehungen ergeben, wo zwei Glieder, $\frac{d^2B_i}{dy^2}$ und $\frac{d^2B_i}{dz^2}$, nöthig sind. Man kann statt der Variabeln y, z zwei andere einführen, so dass man statt der zwei Glieder nur eins bekommt. Statt x, y, z führen wir ein x, t, u, wo

$$t = \alpha y + \beta z,\quad u = \gamma y + \delta z.$$

Die vier Constanten lassen sich so bestimmen, dass die Summe der zweiten Derivirten nur eine Constante enthält. Man denke sich Q einmal durch y, z, dann durch t, u ausgedrückt; es ist

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{dQ}{dt}\frac{dt}{dy} + \frac{dQ}{du}\frac{du}{dy} = \alpha\frac{dQ}{dt} + \gamma\frac{dQ}{du},$$

folglich

$$\frac{d^2Q}{dy^2} = \frac{d^2Q}{dt^2}\alpha^2 + 2\frac{d^2Q}{dtdu}\alpha\gamma + \frac{d^2Q}{du^2}\gamma^2.$$

Durch Vertauschung von α, γ mit β, δ resp. erhält man hieraus:

$$\frac{d^2Q}{dz^2} = \frac{d^2Q}{dt^2}\beta^2 + 2\frac{d^2Q}{dtdu}\beta\delta + \frac{d^2Q}{du^2}\delta^2.$$

Man setze also

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0,\ \text{und}\ \gamma^2 + \delta^2 = 0$$

oder

$$\beta = \pm i\alpha,\ \delta = \pm i\gamma.$$

Die Zeichen darf man nicht gleich nehmen; denn dann fände zwischen t und u ein constantes Verhältniss statt, da sie doch von einander unabhängig sein sollen. Wir setzen also

$$t = \alpha(y + zi),\quad u = \gamma(y - zi).$$

Setzen wir noch

$$4\alpha\gamma = 1,\ \alpha = \tfrac{1}{2},\ \gamma = \tfrac{1}{2},$$

wodurch

$$t = \tfrac{1}{2}(y + zi),\ u = \tfrac{1}{2}(y - zi)$$

wird, so verwandelt sich die ursprüngliche Differentialgleichung

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dy^2} + \frac{d^2Q}{dz^2} = 0$$

in diese einfachere

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^2Q}{dt\,du} = 0.$$

Q ist jetzt eine homogene Function von x, t, u. Setzen wir also

$$Q = R_0 + R_1 x + R_2 x^2 + \cdots + R_{n-1} x^{n-1} + R_n x^n,$$

so ist R_0 ein Polynom n^{ten} Grades von t, u; R_1 eins $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades u. s. f. Da nun

$$\frac{d^2Q}{dt\,du} = \frac{d^2R_0}{dt\,du} + \frac{d^2R_1}{dt\,du}\,x + \frac{d^2R_2}{dt\,du}\,x^2 + \cdots,$$

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = 1\cdot 2\,R_2 + 2\cdot 3\,R_3 x + 3\cdot 4\,R_4 x^2 + \cdots$$

ist, so folgt:

$$1\cdot 2\,R_2 + \frac{d^2R_0}{dt\,du} = 0,\quad 2\cdot 3\,R_3 + \frac{d^2R_1}{dt\,du} = 0,$$

$$3\cdot 4\,R_4 + \frac{d^2R_2}{dt\,du} = 0 \text{ u. s. f.}$$

Also die R mit geradem Index hängen von R_0 ab, die anderen von R_1, und es wird:

$$\left.\begin{aligned} Q = R_0 &- \frac{1}{1\cdot 2}\frac{d^2R_0}{dt\,du}\,x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{d^4R_0}{dt^2du^2}\,x^4 - \cdots \\ + R_1 x &- \frac{1}{2\cdot 3}\frac{d^2R_1}{dt\,du}\,x^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\frac{d^4R_1}{dt^2du^2}\,x^5 - \cdots \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

R_0 enthält $(n+1)$, R_1 n von einander unabhängige Constante; mithin enthält der vorstehende Ausdruck für Q $2n+1$ von einander unabhängige Constante. R_0 ist ein Polynom, von welchem irgend ein Glied ist $ct^\alpha u^\beta$, wo $\alpha + \beta = n$ ist. Jedes Glied zieht sich durch die ganze erste Horizontallinie in dem Ausdruck (I) für Q hindurch, mit derselben Constanten. Also ein Bestandtheil von R_0, wie $ct^\alpha u^\beta$, liefert, mit Weglassung des constanten Factors c, folgenden Beitrag M zum ersten Theil des Q:

$$M = t^\alpha u^\beta - \frac{\alpha\beta}{1\cdot 2}\,t^{\alpha-1}u^{\beta-1}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,t^{\alpha-2}u^{\beta-2}x^4 - \cdots$$

$$= t^\alpha u^\beta\left(1 - \frac{\alpha\beta}{1\cdot 2}\frac{x^2}{tu} + \frac{\alpha(\alpha-1)\,\beta(\beta-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{x^2}{tu}\right)^2 - \cdots\right).$$

Wir müssen t, u durch y, z ausdrücken, und dann $x = \varrho \cos\vartheta$, $y = \varrho \sin\vartheta \cos\varphi$, $z = \varrho \sin\vartheta \sin\varphi$ setzen, wodurch wir erhalten

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\vartheta \\ t &= \tfrac{1}{2} \sin\vartheta e^{\varphi i} \varrho \\ u &= \tfrac{1}{2} \sin\vartheta e^{-\varphi i} \varrho \end{aligned} \Bigg\} \; tu = \tfrac{1}{4} \sin\vartheta^2 \varrho^2.$$

Substituiren wir diese Werthe in dem obigen Ausdruck für M, so wird

$$M = \frac{1}{2^n} \sin\vartheta^n e^{(\alpha-\beta)\varphi i} \varrho^n \left(1 - \frac{\alpha\beta}{1\cdot 2} \cdot 4 \cdot \frac{\cos\vartheta^2}{\sin\vartheta^2} + \cdots\right).$$

Der Factor $\frac{1}{2^n}$ kann fortbleiben, da doch noch ein willkürlicher constanter Factor hinzuzufügen ist, und der übrige Ausdruck lässt sich so schreiben:

$$e^{(\alpha-\beta)\varphi i} \varrho^n \left(\sin\vartheta^n - \frac{2\alpha\cdot 2\beta}{1\cdot 2} \sin\vartheta^{n-2} \cos\vartheta^2 \right.$$
$$\left. + \frac{2\alpha\,(2\alpha-2)\,2\beta\,(2\beta-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \sin\vartheta^{n-4} \cos\vartheta^4 - \cdots\right).$$

Es ist $\alpha + \beta = n$; setzen wir $\alpha - \beta = s$, so ist

$$\alpha = \frac{n+s}{2}, \; \beta = \frac{n-s}{2},$$

und der vorstehende Ausdruck geht durch Substitution dieser Werthe für α, β über in:

$$e^{s\varphi i} \varrho^n \left(\sin\vartheta^n - \frac{(n+s)(n-s)}{1\cdot 2} \sin\vartheta^{n-2} \cos\vartheta^2 \right.$$
$$\left. + \frac{(n+s)(n+s-2)(n-s)(n-s-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \sin\vartheta^{n-4} \cos\vartheta^4 - \cdots\right).$$

Dies ist der Beitrag, der aus irgend einer Combination α, β entsteht, für welche $\alpha + \beta = n$ ist. Wir haben alle diese Combinationen zu berücksichtigen. Nehmen wir zunächst diejenige, welche durch Vertauschung der vorigen Werthe α, β erhalten wird, so geht s über in $-s$; in dem letzten Ausdruck ändert sich daher nur der erste Factor $e^{s\varphi i}$, indem dieser übergeht in $e^{-s\varphi i}$. Diese zwei Combinationen liefern also, indem wir zugleich die noch fehlenden beliebigen constanten Factoren beifügen, folgenden Beitrag:

$$(Ce^{s\varphi i} + De^{-s\varphi i}) \varrho^n \left(\sin\vartheta^n - \frac{(n+s)(n-s)}{1\cdot 2} \sin\vartheta^{n-2} \cos\vartheta^2 + \cdots\right),$$

oder, da wir

$$Ce^{s\varphi i} + De^{-s\varphi i} = A_s \cos s\varphi + B_s \sin s\varphi$$

setzen können,

$$(A_s \cos s\varphi + B_s \sin s\varphi)\varrho^n\left(\sin\vartheta^n - \frac{(n+s)(n-s)}{1\cdot 2}\sin\vartheta^{n-2}\cos\vartheta^2 + \cdots\right),$$

wo A_s, B_s zwei beliebige Constante sind. Es ist s immer eine positive ganze Zahl und gleichartig mit n, d. h. gerade oder ungerade, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Gehen wir daher sämmtliche Combinationen α, β durch, so haben wir für s alle Werthe zu nehmen, welche positiv, kleiner als n und gleichartig mit n sind. Der erste Theil des Q, welcher von der ersten Horizontallinie in (I) herrührt, wird demnach

$$\varrho^n \Sigma(A_s \cos s\varphi + B_s \sin s\varphi)\left(\sin\vartheta^n - \frac{(n+s)(n-s)}{2\cdot 3}\sin\vartheta^{n-2}\cos\vartheta^2 + \cdots\right),$$

wo das Summenzeichen Σ sich auf die Werthe

$$s = n,\ n-2,\ n-4, \cdots 1 \text{ oder } 0$$

bezieht. Jedem dieser Werthe, mit Ausnahme des Werthes $s = 0$, entsprechen zwei willkürliche Constante A_s und B_s; für $s = 0$ bekommt man nur die eine Constante A_0. Die Anzahl der Constanten, welche diese Summe involvirt, ist demnach $n + 1$.

Behandelt man den zweiten Theil des Q, nämlich

$$R_1 x - \frac{1}{2\cdot 3}\frac{d^2 R_1}{dt\,du}x^3 + \cdots$$

in derselben Weise, indem man beachtet, dass R_1 eine homogene Function von t und u vom Grade $n - 1$ ist, so wird man finden, dass derselbe gleich ist

$$\varrho^n \Sigma (A_s \cos s\varphi + B_s \sin s\varphi) \times$$
$$\left(\sin\vartheta^{n-1}\cos\vartheta - \frac{(n-1+s)(n-1-s)}{1\cdot 2}\sin\vartheta^{n-3}\cos\vartheta^3 + \cdots\right),$$

wo s gleichartig ist mit $n - 1$, so dass man für s die Werthe

$$n-1,\ n-3, \cdots 1 \text{ oder } 0$$

zu setzen hat. Jedem s, mit Ausnahme von $s = 0$, entsprechen wieder zwei Constante, und für $s = 0$ schmelzen

die zwei Constanten wieder in eine zusammen. Diese Summe enthält folglich n Constante.

Addirt man diese zwei Bestandtheile des Q und lässt den Factor ϱ^n fort, *so erhält man schliesslich als allgemeinste Kugelfunction n^{ter} Ordnung eine solche Summe*:

$$X_n = \Sigma(A_s \cos s\varphi + B_s \sin s\varphi)\Big(\sin\vartheta^n - \frac{(n+s)(n-s)}{1\cdot 2}\sin\vartheta^{n-2}\cos\vartheta^2$$
$$+ \frac{(n+s)(n+s-2)(n-s)(n-s-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin\vartheta^{n-4}\cos\vartheta^4 + \cdots\Big)$$
$$+\Sigma(A_s\cos s\varphi + B_s \sin s\varphi)\Big(\sin\vartheta^{n-1}\cos\vartheta - \frac{(n-1+s)(n-1-s)}{2\cdot 3}\sin\vartheta^{n-3}\cos\vartheta^3$$
$$+ \frac{(n-1+s)(n-1-s)(n-3+s)(n-3-s)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\sin\vartheta^{n-5}\cos\vartheta^5 - \cdots\Big).$$

Für s hat man sämmtliche Werthe von 0 bis n zu setzen, und zwar in der oberen Summe die mit n gleichartigen, in der unteren die mit n ungleichartigen. Die obere Summe enthält $n+1$, die untere n Constante: X_n enthält folglich $2n+1$ Constante. Es ist leicht, sich zu überzeugen, dass diese $2n+1$ Constanten von einander unabhängig sind, d. h. dass man die $2n+1$ Constanten nicht variiren kann, ohne dass die resultirenden Werthe des X_n verschieden sind. Es sei also

$$(\alpha)\begin{cases} \begin{Bmatrix} \Sigma(A_s\cos s\varphi + B_s\sin s\varphi)(\sin\vartheta^n - \cdot\cdot) \\ + \Sigma(A_s\cos s\varphi + B_s\sin s\varphi)(\sin\vartheta^{n-1}\cos\vartheta - \cdot\cdot) \end{Bmatrix} = \\ = \begin{cases} \Sigma(a_s\cos s\varphi + b_s\sin s\varphi)(\sin\vartheta^n - \cdot\cdot) \\ + \Sigma(a_s\cos s\varphi + b_s\sin s\varphi)(\sin\vartheta^{n-1}\cos\vartheta\cdots). \end{cases} \end{cases}$$

Setzt man hierin $\vartheta = 90^0$, so wird der zweite Theil auf beiden Seiten ganz wegfallen, während im ersten der Factor $(\sin\vartheta^n - \cdots)$ sich auf 1 reducirt. Es muss also

$$\Sigma(A_s\cos s\varphi + B_s\sin s\varphi) = \Sigma(a_s\cos s\varphi + b_s\sin s\varphi)$$

sein, wo für s die Werthe $n, n-2, \cdots$ zu setzen sind, was offenbar unmöglich wäre, wenn die entsprechenden Constanten A_s und a_s, B_s und b_s verschieden wären. Differenzirt man (α) nach ϑ, und setzt nach der Differentiation $\vartheta = 90^0$, so wird der zweite Theil nicht verschwinden, wohl aber der erste, woraus sich dann ergiebt, dass auch die Constanten des zweiten Theils nicht verschieden sein können.

Die allgemeinste Kugelfunction besteht also aus Gliedern, wo ganze Functionen von $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ mit Cosinus und Sinus von φ multiplicirt sind.

Soll der Ausdruck X_n von φ unabhängig sein, so müssen die Constanten, die $\cos s\varphi$ und $\sin s\varphi$ multipliciren, gleich Null sein, bis auf A_0. Ist also n gerade, so ist

$$A_0\left(\sin\vartheta^n - \frac{n^2}{1\cdot 2}\sin\vartheta^{n-2}\cos\vartheta^2 + \frac{n^2(n-2)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin\vartheta^{n-4}\cos\vartheta^4 - \cdots\right),$$

und ist n ungerade,

$$A_0\left(\sin\vartheta^{n-1}\cos\vartheta\right.$$

$$\left.-\frac{(n-1)^2}{2\cdot 3}\sin\vartheta^{n-3}\cos\vartheta^3 + \frac{(n-1)^2(n-3)^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\sin\vartheta^{n-5}\cos\vartheta^5 - \cdots\right)$$

der allgemeinste Ausdruck für eine von φ unabhängige Kugelfunction. Da $P_n(\cos\omega)$, und deshalb auch $P_n(\cos\vartheta)$ eine Kugelfunction n^{ten} Grades ist, und da $P_n(\cos\vartheta)$ von φ unabhängig ist, so kann sich jede von φ unabhängige Kugelfunction n^{ten} Grades von $P_n(\cos\vartheta)$ nur durch einen constanten Factor unterscheiden.

Fünfter Abschnitt.

Anwendungen der Theorie auf einige specielle Aufgaben aus der Elektricitätslehre.

§. 23.

Die Anwendungen der bisher vorgetragenen Theorie, die wir zu machen haben, zerfallen in zwei Classen: wir werden zunächst eine Anzahl von bestimmten speciellen Problemen lösen, und nachher allgemeine Probleme. Erstere gehören der Elektrostatik an, und setzen die Kenntniss folgender Erfahrungssätze und Hypothesen aus der Elektricitätslehre voraus.

Man unterscheidet zwei Elektricitäten, die positive und die negative, und zwei Gattungen von Körpern, Leiter und Nichtleiter. In beiden denken wir uns ein wirkungsloses Gemisch von positiver und negativer Elektricität, die sich gegenseitig binden. Den Gegenstand der Betrachtung bildet das Verhalten der Elektricität in einem Leiter, in dem sie sich mit der grössten Leichtigkeit bewegen kann. In einem Leiter befindet sich *freie* Elektricität immer nur an der Oberfläche. Die Dicke der elektrischen Schicht kann nicht gemessen werden, so dass wir letztere als eine mit Masse belegte Fläche betrachten können. Jeder Leiter kann beliebig viel neue Elektricität entwickeln, aber so, dass die positive immer in demselben Quantum da ist wie die negative. Wird ein Leiter in die Nähe von schon elektrischen Körpern gebracht, so tritt eine Decomposition des in ihm enthaltenen Gemisches ein, es bildet sich augenblicklich eine elektrische Schicht auf seiner Oberfläche. Wir haben es nicht mit dem Act der Decomposition zu thun, es bildet

sich augenblicklich eine Schicht, und wir stellen uns die Aufgabe, die Dichtigkeit derselben an jeder Stelle der Oberfläche zu bestimmen, d. h. den Factor, mit welchem man das Flächenelement zu multipliciren hat, um die darauf befindliche Elektricitätsmenge zu erhalten. Das Princip, welches der Lösung unserer Aufgabe zu Grunde liegt, lautet:

Die Resultante aller elektrischen Kräfte, die ausgeübt werden von den einzelnen Elementen der auf dem Leiter sich bildenden Schicht und des Nichtleiters, der als gegeben angesehen wird und sich nicht ändert durch die Nähe des durch ihn elektrisch werdenden Leiters, muss, wenn das Gleichgewicht auf dem Leiter eingetreten ist, in allen im Innern des Leiters liegenden Punkten Null sein.

So lange jene Resultante nämlich nicht Null ist, wird ja eine weitere Decomposition im Innern des Leiters eintreten. Dies einfache Princip gilt auch da, wo man ein System von getrennten Leitern hat. Aber schon die einfachsten Fälle bieten grosse Schwierigkeiten dar.

§. 24.

Wir fangen mit Einem Leiter an, der die Form einer Kugel hat, und mit einem beliebigen Nichtleiter. Der Radius der Kugel sei a. Wir entwickeln zunächst das Potential der elektrischen Schicht, die sich auf dem kugelförmigen Leiter bildet, in eine Reihe, indem wir die noch unbekannte Dichtigkeit der Schicht durch k bezeichnen. Das Flächenelement der Kugeloberfläche ist $a^2 \sin \vartheta' \, d\vartheta' \, d\varphi' = a^2 d\sigma'$, und das Potential der Kugelschicht in Bezug auf einen beliebigen Punkt, der durch ϱ, ϑ, φ gegeben ist,

$$v = \int \frac{k' \, d\sigma'}{\sqrt{(a^2 - 2a\varrho \cos \omega + \varrho^2)}}.$$

Wir brauchen das Potential bloss für innere Punkte zu entwickeln; für diese hat man (§. 16.):

$$v = a \int \frac{k' \, d\sigma'}{\sqrt{\left(1 - 2\frac{\varrho}{a} \cos \omega + \left(\frac{\varrho}{a}\right)^2\right)}} = a \int k' \, d\sigma' \sum_0^\infty \left(\frac{\varrho}{a}\right)^n P_n(\cos \omega).$$

Was auch immer die Dichtigkeit k sei, so können wir uns

dieselbe, als Function zweier Veränderlichen ϑ', φ', in eine Kugelfunctionreihe entwickelt denken. Wir setzen also

$$k = X_0 + X_1 + X_2 + \cdots = \sum_0^\infty X_m,$$

wodurch wir erhalten

$$v = a \int d\sigma' \sum_0^\infty X_m' \sum_0^\infty \left(\frac{\varrho}{a}\right)^n P_n(\cos\omega)$$

$$= a \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\varrho}{a}\right)^n \sum_{m=0}^\infty \int X_m' P_n(\cos\omega)\, d\sigma'.$$

Dies Integral ist 0, wenn die Indices m und n verschieden sind (§. 20., 5.); für $m = n$ fanden wir

$$\int X_n' P_n(\cos\omega)\, d\sigma' = \frac{4\pi}{2n+1} X_n.$$

Mithin ist

$$v = 4\pi a \sum \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\varrho}{a}\right)^n X_n.$$

Dies ist eine einfache Summe.

Sollte man die Entwicklung für einen äusseren Punkt machen, so hätte man:

$$v = \frac{a^2}{\varrho} \int \frac{k'\, d\sigma'}{\sqrt{\left(1 - 2\frac{a}{\varrho}\cos\omega + \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2\right)}} = 4\pi \frac{a^2}{\varrho} \sum \frac{1}{2n+1} \left(\frac{a}{\varrho}\right)^n X_n.$$

Die gesuchte Dichtigkeit k muss also so beschaffen sein, dass die Schicht, für welche k die Dichtigkeit ist, sammt dem äusseren Nichtleiter, im Innern des Leiters keine Wirkung hervorbringt. Das gegebene Potential für den Nichtleiter, welches wir V nennen wollen, lässt sich auch entwickeln, und zwar, in unserem Fall, nach positiven Potenzen von ϱ (§. 19.). Es sei

$$V = \Sigma \varrho^n Z_n,$$

wo Z_n eine Kugelfunction und als gegeben zu betrachten ist. Soll im Innern des Leiters keine Wirkung ausgeübt werden, so muss die Summe der Potentiale V und v gleich einer Constanten C sein:

$$V + v = C,$$

oder

$$C = \Sigma \varrho^n \left(Z_n + \frac{4\pi}{a^{n-1}} \frac{1}{2n+1} X_n \right), \tag{1}$$

was auch ϱ, ϑ, φ sei. Hieraus bestimmen sich alle X von selbst, bis auf X_0. Denn die Gleichung (1) ist nicht anders zu erfüllen, als dass die Coefficienten von ϱ, ϱ^2, $\varrho^3 \cdots$ einzeln gleich Null sind. Wir haben also

$$X_n = -\frac{2n+1}{4\pi} a^{n-1} Z_n,$$

für $n > 0$. Es kann aber doch nichts unbestimmt bleiben; X_0 bestimmt sich aus dem Quantum Elektricität, welches der Kugel ursprünglich mitgetheilt worden ist, ehe sie in die Nähe des Nichtleiters gebracht wurde. Da nämlich allgemein (§. 21.)

$$X_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int k' P_n (\cos \omega)\, d\sigma'$$

ist, so folgt für $n = 0$, indem $P_0 (\cos \omega) = 1$ ist,

$$X_0 = \frac{1}{4\pi} \int k' d\sigma' = \frac{1}{4\pi a^2} \int k' (a^2 d\sigma').$$

Es ist aber $\int k' (a^2 d\sigma')$ das auf der Kugeloberfläche befindliche Quantum Elektricität; da aber durch den Nichtleiter gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität entwickelt sind, so muss jenes Quantum genau gleich dem der Kugel ursprünglich mitgetheilten Elektricitätsquantum A sein. Mithin ist

$$X_0 = \frac{A}{4\pi a^2},$$

oder X_0 ist die mittlere Dichtigkeit der Kugel, insofern $4\pi a^2$ die Gesammtoberfläche der Kugel ist. Somit wird das Resultat unserer Untersuchung durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$k = \frac{A}{4\pi a^2} - \frac{1}{4\pi} \sum_1^\infty (2n+1)\, a^{n-1} Z_n.$$

Wäre also der Nichtleiter gar nicht da, so würde $k = \frac{A}{4\pi a^2}$ sein, was sich übrigens auch von selbst versteht, und wäre der Kugel ursprünglich keine Elektricität mitgetheilt, d. h. $A = 0$, so würde das erste Glied fortfallen. Was also im

Allgemeinen stattfindet, ist eine Art Superposition, das soll heissen: die Dichtigkeit, welche stattfindet, wenn Beides vorhanden ist, nämlich ein Nichtleiter und ein der Kugel mitgetheiltes Quantum Elektricität, ist gleich der Summe der beiden Dichtigkeiten, die stattfinden würden in den beiden Fällen, wo nur eins vorhanden ist. Dies ist ein ganz allgemeines Princip, insofern es nicht bloss für die Kugel gilt, sondern für jeden beliebig gestalteten Leiter.

§. 25.

Lässt man den Nichtleiter in beliebiger Gestalt, so findet nichts einfaches statt. Es reducire sich also der Nichtleiter auf einen blossen Punkt. Diesen Punkt legen wir in die feste Linie, von wo die Winkel ϑ gezählt werden. Seine Entfernung vom Mittelpunkt der Kugel sei c; die in ihm enthaltene Elektricitätsmenge μ; seine Polarcoordinaten werden sein

$$\varrho' = c, \vartheta' = 0, \varphi' \text{ ad libitum.}$$

Demnach ist $\cos\omega = \cos\vartheta$, und

$$V = \frac{\mu}{\sqrt{(c^2 - 2c\varrho\cos\vartheta + \varrho^2)}} = \frac{\mu}{c}\sum_0^\infty P_n(\cos\vartheta)\left(\frac{\varrho}{c}\right)^n,$$

folglich

$$Z_n = \frac{\mu}{c^{n+1}} P_n(\cos\vartheta).$$

Wir wollen annehmen, dass der Kugel ursprünglich keine Elektricität mitgetheilt sei; dann haben wir

$$k = -\frac{1}{4\pi}\sum_1^\infty (2n+1)\, a^{n-1} Z_n = -\frac{\mu}{4\pi ac}\sum_1^\infty (2n+1)\frac{a^n}{c^n} P_n(\cos\vartheta)$$
$$= \frac{\mu}{4\pi ac}\left(1 - \sum_0^\infty (2n+1)\frac{a^n}{c^n} P_n(\cos\vartheta)\right). \tag{1}$$

Diese Reihe lässt sich leicht summiren; setzen wir $\frac{a}{c} = \alpha$, so ist $\sum_0^\infty (2n+1) P_n(\cos\vartheta)\alpha^n$ zu summiren, wo $\alpha < 1$ ist. Es ist

$$\sum_0^\infty P_n(\cos\vartheta)\,\alpha^n = \frac{1}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2)}}. \tag{2}$$

Differenziren wir beide Seiten dieser Gleichung nach α, so haben wir:

$$\sum_0^\infty nP_n(\cos\vartheta)\,\alpha^{n-1} = \frac{\cos\vartheta-\alpha}{(1-2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

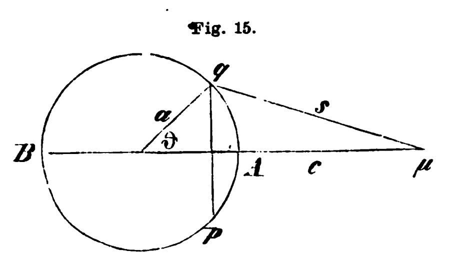
woraus durch Multiplication mit 2α die Gleichung

$$\sum_0^\infty 2n\,P_n(\cos\vartheta)\,\alpha^n = \frac{2\alpha\cos\vartheta-2\alpha^2}{(1-2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{3}$$

entsteht. Aus (2) und (3) erhalten wir schliesslich durch Addition

$$\sum_0^\infty (2n+1)\,P_n(\cos\vartheta)\,\alpha^n = \frac{1-\alpha^2}{(1-2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Fig. 15.



Substituiren wir die zweite Seite der vorstehenden Gleichung statt der ersten in (1), so erhalten wir für die Dichtigkeit in allen Elementen der Kugelfläche, die auf einem auf c senkrechten Kreise pq liegen (Fig. 15.), den Ausdruck

$$k = \frac{\mu}{4\pi a}\left(\frac{1}{c} - \frac{c^2-a^2}{s^3}\right),$$

wo $s = \sqrt{(a^2 - 2ac\cos\vartheta + c^2)}$ die Entfernung des elektrischen Punktes μ von irgend einem jener Elemente bezeichnet, und ϑ den Winkel, den der nach irgend einem derselben gezogene Radius mit der nach μ gerichteten Linie c bildet. In dem Punkt A der Kugel, welcher die kleinste Entfernung von μ hat (für welchen $\vartheta = 0$, $s = c - a$ ist), wird

$$k = \frac{\mu}{4\pi a}\left(\frac{1}{c} - \frac{c+a}{(c-a)^2}\right),$$

und in dem Punkt B, welcher am weitesten vom μ entfernt liegt ($\vartheta = \pi$, $s = c + a$), wird

$$k = \frac{\mu}{4\pi a}\left(\frac{1}{c} - \frac{c-a}{(c+a)^2}\right).$$

Hieraus geht hervor, dass die um ersteren Punkt herum befindliche Elektricität mit μ ungleichartig ist, während die um letzteren herum befindliche mit μ gleichartig ist. Zwischen diesen beiden Punkten giebt es einen gewissen auf c senkrecht stehenden Kreis, in dessen Peripherie $k = 0$ ist; der nach irgend einem Punkte seiner Peripherie gezogene Kugelradius bildet mit c den Winkel ϑ_0, dessen Cosinus, gleich

$$\frac{a^2 + c^2 - (c^3 - a^2 c)^{\frac{2}{3}}}{2ac}$$

ist.[22])

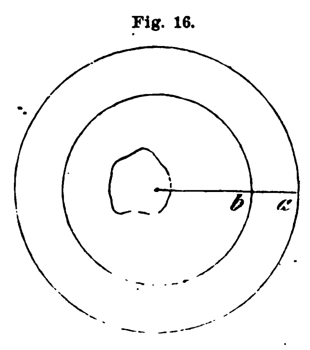
§. 26.

Wir wollen jetzt als Leiter eine Hohlkugel nehmen und einen Nichtleiter in die Höhlung bringen. Es bildet sich an der inneren und äusseren Fläche eine Schicht; es sind also zwei Schichten zu bestimmen. Die Dichtigkeit der äusseren Schicht sei k, der inneren l; es sei wieder

$$k = \Sigma X_n, \quad l = \Sigma Y_n.$$

Hier weiss man noch nicht, wie das Quantum der mitgetheilten Elektricität sich über die beiden Schichten vertheilt. Das Potential von sämmtlichen wirkenden Massenelementen muss innerhalb der Schale constant sein. Dies Potential besteht aus drei Potentialen, aus denen der beiden Schichten und dem des Nichtleiters. Die Potentiale der äusseren und inneren Schicht seien resp. v und v_1, das des Nichtleiters V. Letzteres, welches als gegeben zu betrachten ist, muss in diesem Fall nach negativen Potenzen von ϱ entwickelt werden, ebenso v_1, v hingegen nach positiven. Nennen wir die Radien der äusseren und inneren Fläche resp. a und b (Fig. 16.), so ist nach §. 24.

Fig. 16.



$$v = 4\pi a \sum \frac{X_n}{2n+1}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^n, \quad v_1 = 4\pi b \sum \frac{Y_n}{2n+1}\left(\frac{b}{\varrho}\right)^{n+1},$$

und nach §. 19.

$$V = \sum \frac{Z_n}{\varrho^{n+1}}.$$

Bei der Entwicklung des Potentials irgend einer Masse nach negativen Potenzen des *radius vector* des Punktes, auf den die Masse wirkt, ist der erste Coefficient immer gleich der Masse. Denn das Product aus dem Potential irgend einer Masse in jenen *radius vector* nähert sich bei wachsender Entfernung jenes Punktes von der Masse einer Grenze, und diese Grenze ist die Masse (§. 5.). Demnach ist Z_0 die Menge der auf dem Nichtleiter vorhandenen Elektricität, die wir M nennen wollen. Die Summe jener drei Potentiale innerhalb der Kugelschale ist eine Constante, oder es ist

$$\text{Const} = v + v_1 + V.$$

Fasst man die drei Reihen für v, v_1, V zusammen, so bekommt man eine Reihe, die nach positiven, und eine zweite Reihe, die nach negativen Potenzen von ϱ fortschreitet, und die Summe beider muss eine Constante sein. Nun lässt sich beweisen, dass wenn man eine innerhalb eines gewissen Intervalles (von b bis a) convergirende Reihe hat, die theils positive, theils negative Potenzen enthält, und diese Reihe Null sein soll, dass dann alle einzelnen Glieder Null sein müssen; und dass wenn diese Reihe constant sein soll, das constante Glied schon da sein muss, während alle übrigen Glieder wieder Null sind. Es würde aber schon Umstände machen, dies zu beweisen. Wir wollen uns also nicht auf dies Princip stützen, sondern darauf, dass jede Grösse nur auf eine Weise nach Kugelfunctionen entwickelt werden kann. Hat man eine nach Kugelfunctionen geordnete Reihe, und weiss, dass dieselbe constant ist, so kann man daraus den Schluss ziehen, dass die Kugelfunctionen erster, zweiter, dritter $\cdots$ Ordnung nicht da sind, oder gleich 0 sind. Denn *eine* Entwicklung einer Constanten K nach Kugelfunctionen ist jedenfalls diese:

$$K = K + 0 + 0 + 0 + \cdots,$$

wenn man bedenkt, dass das erste Glied K der zweiten Seite eine Kugelfunction nullter Ordnung, das zweite Glied 0 eine

erster, das dritte Glied 0 eine zweiter Ordnung ist u. s. w. Hat man also auch

$$K = T_0 + T_1 + T_2 + \cdots,$$

so ist

$$T_0 = K;\ T_1 = T_2 = \cdots = 0.$$

Man addire also die drei allgemeinen Glieder jener drei Potentialentwicklungen, und bemerke, dass die daraus entstehende Summe eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung ist, weil jene Glieder einzeln Kugelfunctionen n^{ter} Ordnung sind (§. 20., 2. und 3.); diese Summe muss also 0 sein, ausgenommen, wenn $n = 0$ war. Also bekommen wir jetzt folgende Bedingung, für $n > 0$:

$$\frac{4\pi a}{2n+1}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^n X_n + \left(\frac{4\pi b}{2n+1} Y_n b^{n+1} + Z_n\right)\frac{1}{\varrho^{n+1}} = 0. \quad (1)$$

Diese Gleichung findet statt, was auch ϱ sei, folglich muss jedes der zwei Glieder der ersten Seite für sich gleich 0 sein, d. h.

$$\left.\begin{aligned} &1)\ X_n = 0 \\ &2)\ \frac{4\pi b}{2n+1} Y_n b^{n+1} + Z_n = 0 \end{aligned}\right\}\ \text{wenn } n > 0.$$

Aus 1) folgt $k = X_0$. Also die äussere Schicht ist eine constante Schicht, d. h. ihre Dichtigkeit ist überall dieselbe, gerade wie wenn der Nichtleiter gar nicht da wäre. Aus 2) bestimmen sich alle Y von Y_1 an, indem

$$Y_n = -\frac{2n+1}{4\pi b^{n+2}} Z_n$$

ist. (Wir werden sogleich sehen, dass diese Gleichung auch für Y_0 gilt.)

Unser Problem wäre also gelöst, wenn wir X_0 und Y_0 hätten. X_0 und Y_0 sind die constanten Glieder in den Entwicklungen der Dichtigkeiten k und l nach Kugelfunctionen. Nennen wir die in der äusseren und inneren Schicht enthaltenen Elektricitätsmengen resp. A und B, so ist nach §. 24.

$$X_0 = \frac{A}{4\pi a^2},\ Y_0 = \frac{B}{4\pi b^2}. \quad (2)$$

Wir kennen aber, wie schon oben bemerkt, weder A noch B, sondern nur ihre Summe

$$A + B = C, \tag{3}$$

wo C die der Hohlkugel mitgetheilte Elektricitätsmenge bedeutet. Aus (2) und (3) folgt

$$4\pi a^2 X_0 + 4\pi b^2 Y_0 = C. \tag{4}$$

Setzen wir in der Gleichung

$$\text{Const} = v + v_1 + V$$

für v, v_1, V ihre Entwicklungen, so reducirt sich die zweite Seite derselben, wegen (1), auf das erste Glied, welches $n = 0$ entspricht, und wir haben

$$\text{Const} = 4\pi a^2 X_0 + (4\pi b^2 Y_0 + Z_0) \frac{1}{\varrho}.$$

Diese Gleichung kann offenbar nicht bestehen, wenn nicht

$$4\pi b^2 Y_0 + Z_0 = 0$$

ist, woraus sich ergiebt

$$Y_0 = -\frac{Z_0}{4\pi b^2} = -\frac{M}{4\pi b^2}.$$

Substituiren wir diesen Werth für Y_0 in (4), so erhalten wir auch X_0; es wird

$$X_0 = \frac{C + M}{4\pi a^2}.$$

Somit ist

$$k = \frac{C + M}{4\pi a^2}$$

$$l = -\frac{M}{4\pi b^2} - \sum_1^\infty \frac{2n+1}{4\pi b^{n+2}} Z_n.$$

An der äusseren Fläche bildet sich also eine constante Schicht, und die in derselben enthaltene Elektricitätsmenge ist $C + M$, d. h. die Summe aus der der Hohlkugel mitgetheilten und der des Nichtleiters. Die innere Schicht hat also die Masse $-M$.

Wenn nun Gleichgewicht eingetreten ist, wie wirkt das Ganze, d. h. die beiden Schichten und der Nichtleiter, nach aussen? Aus dem Vorhergehenden ist klar, dass $V + v_1 = 0$ ist, und zwar nicht bloss in der Kugelschale, sondern für jedes ϱ, welches grösser als b ist. Wenn wir also das Potential des Ganzen für den äusseren Raum entwickeln (nach negativen Potenzen von ϱ), so wird bloss das Potential der

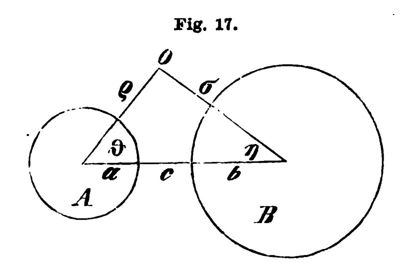
äusseren Schicht bleiben. Letztere ist aber eine constante Schicht, mit der Elektricitätsmenge $C + M$. Würde also der Nichtleiter im Innern bewegt, oder würde eine andere Vertheilung seiner Elektricitätsmenge in ihm vorgenommen, so würde die Wirkung nach aussen dieselbe bleiben. Durch eine Umhüllung eines Nichtleiters mit einer leitenden Hohlkugel wird folglich alle Individualität desselben eliminirt; nur die in ihm enthaltene Menge von Elektricität kommt in Betracht.[23]) Dies ist ein ganz allgemeines Phänomen, wie später gezeigt werden wird.

§. 27.

Es seien zwei von einander völlig getrennte Leiter gegeben, die beide kugelförmig sind; man theilt beiden Elektricität mit: es sollen die Schichten, die sich auf beiden Kugeln bilden, bestimmt werden.[24])

Die beiden kugelförmigen Leiter wollen wir A und B nennen (Fig. 17.), ihre Radien a und b, die Dichtigkeiten der auf ihnen sich bildenden Schichten k und l, das Stück der Centrallinie, welches zwischen ihren Mittelpunkten liegt, c. Da die Leiter völlig getrennt sein sollen, wird c jedenfalls grösser als $a + b$ sein.

Fig. 17.



Die Lage irgend eines Punktes O bestimmen wir wieder durch Polarcoordinaten. Als feste Linie, von der aus wir die Winkel zählen, welche die Lage von O bestimmen, wählen wir die Centrallinie. Den *radius vector* von O nennen wir ϱ oder σ, jenachdem der Mittelpunkt von A oder B als Pol angenommen wird; den Winkel, den ϱ mit der von A nach B gerichteten Centrallinie bildet, nennen wir ϑ, und den Winkel, den σ mit der von B nach A gerichteten Centrallinie bildet, η. Dann ist offenbar

$$c = \varrho \cos \vartheta + \sigma \cos \eta.$$

Wir setzen wieder

$$k = \Sigma X_n, \; l = \Sigma Y_n.$$

Die Schichten, die sich bilden, werden um die Centrallinie symmetrisch liegen, so dass k nur von dem Winkel ϑ abhängt, und l nur von dem Winkel η. Zufolge der am Schluss des §. 22. gemachten Bemerkung können wir daher für X_n und Y_n unmittelbar annehmen $\alpha_n P_n(\cos\vartheta)$ und $\beta_n P_n(\cos\eta)$, und mithin

$$k = \Sigma \alpha_n P_n(\cos\vartheta), \; l = \Sigma \beta_n P_n(\cos\eta)$$

setzen. Die Lösung unseres Problems kommt demnach darauf hinaus, die constanten Coefficienten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \cdots; \beta_0, \beta_1, \beta_2 \cdots$ zu bestimmen.

Wir müssen jetzt die Potentiale der beiden Schichten bilden; denn wir haben auszudrücken, dass das Gesammtpotential innerhalb der ersten Kugel A, und ebenfalls innerhalb der zweiten B constant ist. Es sei v die Entwicklung des Potentials der ersten Schicht innerhalb, v_1 ausserhalb der ersten Kugel; und w die Entwicklung des Potentials der zweiten Schicht innerhalb, w_1 ausserhalb der zweiten Kugel. Dann hat man (§. 24.):

$$v = 4\pi a \sum \left(\frac{\varrho}{a}\right)^n \frac{\alpha_n P_n(\cos\vartheta)}{2n+1}, \; v_1 = \frac{4\pi a^2}{\varrho} \sum \left(\frac{a}{\varrho}\right)^n \frac{\alpha_n P_n(\cos\vartheta)}{2n+1}$$

$$w = 4\pi b \sum \left(\frac{\sigma}{b}\right)^n \frac{\beta_n P_n(\cos\eta)}{2n+1}, \; w_1 = \frac{4\pi b^2}{\sigma} \sum \left(\frac{b}{\sigma}\right)^n \frac{\beta_n P_n(\cos\eta)}{2n+1};$$

ferner

$$v + w_1 = \text{Const}, \; v_1 + w = \text{const}$$

oder

$$a \sum \left(\frac{\varrho}{a}\right)^n \frac{\alpha_n P_n(\cos\vartheta)}{2n+1} + \frac{b^2}{\sigma} \sum \left(\frac{b}{\sigma}\right)^n \frac{\beta_n P_n(\cos\eta)}{2n+1} = P \quad (1)$$

$$\frac{a^2}{\varrho} \sum \left(\frac{a}{\varrho}\right)^n \frac{\alpha_n P_n(\cos\vartheta)}{2n+1} + b \sum \left(\frac{\sigma}{b}\right)^n \frac{\beta_n P_n(\cos\eta)}{2n+1} = Q, \quad (2)$$

wo P und Q constante Grössen bezeichnen, und zwischen den vier Grössen $\varrho, \sigma, \vartheta, \eta$ die Gleichung

$$c = \varrho\cos\vartheta + \sigma\cos\eta$$

stattfindet. Die Gleichung (1) gilt für alle Werthe von ϑ, die zwischen 0 und 2π liegen, und für alle Werthe von ϱ, die zwischen 0 und a liegen; die Gleichung (2) für alle Werthe von η, die zwischen 0 und 2π liegen, und für alle Werthe von σ, die zwischen 0 und b liegen.

Erfüllt man die zwei Bedingungen (1) und (2), indem man sich auf die Punkte beschränkt, die auf der Linie c resp. in der ersten und zweiten Kugel liegen, so sind sie von selbst für alle übrigen Punkte resp. der ersten und zweiten Kugel erfüllt. Es findet nämlich folgender allgemeine Satz statt: Hat man ein Massensystem, welches symmetrisch um eine Axe liegt, und umschliesst das ganze Massensystem, oder ein Theil A desselben, einen massenleeren Raum, so braucht das Potential des Massensystems nur constant zu sein auf einem beliebig kleinen Theil der Axe, welcher in jenen Raum hineinfällt, um überall in jenem Raum constant zu sein.[25]) Wenn wir uns also auf die Punkte beschränken, die auf der Axe liegen, so ist in (1) ϑ entweder 0 oder π, folglich $\cos\vartheta = \pm 1$, während η immer Null, folglich $\cos\eta = 1$ ist, und die Gleichung $c = \varrho\cos\vartheta + \sigma\cos\eta$ geht über in

$$c = \pm\varrho + \sigma.$$

Es war

$$P_n(\cos\vartheta)\,\alpha^n = \frac{1}{\sqrt{(1 - 2\alpha\cos\vartheta + \alpha^2)}};$$

folglich ist

$$P_n(1) = 1, \text{ und } P_n(-1) = (-1)^n, \text{ oder } P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n.$$

Für die auf der Axe liegenden Punkte geht die Gleichung (1) demnach über in die folgende:

$$P = a\sum\frac{\alpha_n}{2n+1}\left(\frac{\pm\varrho}{a}\right)^n + \frac{b^2}{c\mp\varrho}\sum\frac{\beta_n}{2n+1}\left(\frac{b}{c\mp\varrho}\right)^n. \quad (3)$$

Auf dieselbe Weise findet man, dass die Gleichung (2) für die auf der Axe liegenden Punkte sich in die folgende verwandelt:

$$Q = b\sum\frac{\beta_n}{2n+1}\left(\frac{\pm\sigma}{b}\right)^n + \frac{a^2}{c\mp\sigma}\sum\frac{\alpha_n}{2n+1}\left(\frac{a}{c\mp\sigma}\right)^n. \quad (4)$$

Wir suchen die Grössen α und β, welche den Gleichungen (3) und (4) genügen; dieselben Grössen werden, jenem allgemeinen Satz zufolge, den Gleichungen (1) und (2) genügen. Setzen wir

$$\frac{\pm\varrho}{a} = x,\ \frac{\pm\sigma}{b} = y,$$

so liegen x und y zwischen -1 und $+1$, da ϱ zwischen 0

und a, σ zwischen 0 und b liegt. Drücken wir in (3) und (4) ϱ und σ resp. durch x und y aus, so erhalten wir:

$$P = a \sum \frac{\alpha_n}{2n+1} x^n + \frac{b^2}{c - ax} \sum \frac{\beta_n}{2n+1} \left(\frac{b}{c - ax}\right)^n$$

$$Q = b \sum \frac{\beta_n}{2n+1} y^n + \frac{a^2}{c - by} \sum \frac{\alpha_n}{2n+1} \left(\frac{a}{c - by}\right)^n.$$

Wir setzen

$$\sum \frac{\alpha_n}{2n+1} x^n = f(x), \quad \sum \frac{\beta_n}{2n+1} y^n = F(y), \tag{5}$$

wodurch die vorhergehenden beiden Gleichungen übergehen in

$$P = a f(x) + \frac{b^2}{c - ax} F\left(\frac{b}{c - ax}\right) \tag{6}$$

$$Q = bF(y) + \frac{a^2}{c - by} f\left(\frac{a}{c - by}\right).$$

Dies sind zwei sogenannte Functionalgleichungen. Es ist leicht daraus eine dritte Functionalgleichung zu bilden, worin nur eine der beiden Functionen f und F, z. B. f, vorkommt. Zu diesem Zweck geben wir in der zweiten Gleichung dem y den Werth $\frac{b}{c - ax}$, der zwischen 0 und 1 liegt, und als Argument der Function F in der ersten Gleichung erscheint; setzen wir zugleich

$$\frac{c^2 - b^2}{a} = k,$$

so erhalten wir die Gleichung

$$Q = bF\left(\frac{b}{c - ax}\right) + \frac{a\,(c - ax)}{k - cx} f\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right).$$

Combiniren wir diese mit der Gleichung (6), so entsteht durch Elimination der Function F folgende Functionalgleichung für $f(x)$:

$$f(x) - \frac{b}{k - cx} f\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = \frac{1}{a}\left(P - \frac{b}{c - ax}\, Q\right).$$

Aus dieser Gleichung ist die Function $f(x)$ zu bestimmen. Ist das geschehen, so ist $f(x)$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu entwickeln; dann werden sich die Grössen α durch Vergleichung dieser Reihe mit der ersten Seite der Gleichung (5) ergeben.

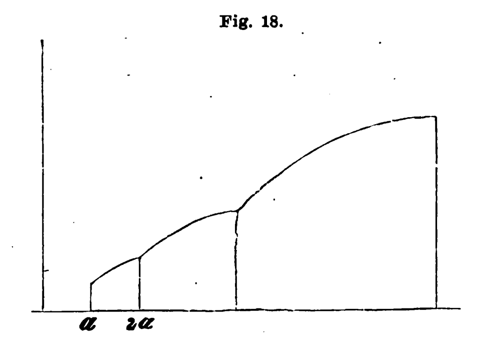
§. 28.

Gesetzt man hätte für eine Function $\varphi(x)$ folgende Functionalgleichung

$$\varphi(2x) = 2\varphi(x), \tag{1}$$

woraus man die Function $\varphi(x)$ bestimmen sollte. Die Gleichung besagt, dass wenn wir das Argument verdoppeln, aus dem ersten Werth der Function der neue, dem doppelten Argument entsprechende, bestimmt ist. Gar kein anderer Zusammenhang ist durch die Gleichung ausgesprochen. Daraus folgt, dass die Curve $y = \varphi(x)$ vollkommen willkürlich bleibt von irgend einer Abscisse a bis zur doppelten $2a$, nur dass die letzte Ordinate das Doppelte von der ersten ist. Solche Functionalgleichung involvirt also eine beliebige Function (Fig. 18.). Wenn aber zu einer solchen Gleichung noch Nebenbedingungen hinzukommen, so kann sich Alles be-

Fig. 18.



stimmen. Soll jene Curve z. B. so beschaffen sein, dass sie im Anfangspunkt eine Tangente hat, so ist Alles bestimmt. Denn man hat

$$\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{x}{2}\right),$$

oder

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \frac{\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}. \tag{2}$$

Die Derivirte ist

$$\lim \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h},$$

also im Anfangspunkt ist dieselbe, da $\varphi(0)$ wegen (1) gleich Null ist,

$$\lim \frac{\varphi(h)}{h}, \text{ für ein abnehmendes h},$$

wofür wir auch sagen können

$$\lim \frac{\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}, \text{ für ein wachsendes } n.$$

Es ist aber, nach (2), für jedes n

$$\frac{\varphi\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} = \frac{\varphi(x)}{x};$$

mithin ist auch die *Grenze* der ersten Seite dieser Gleichung für ein wachsendes n gleich $\frac{\varphi(x)}{x}$. Hat nun die Derivirte im Anfangspunkt einen bestimmten Werth c, so ist folglich $\frac{\varphi(x)}{x} = c$, oder $\varphi(x) = cx$, d. h. die Curve ist eine gerade Linie.

Zu demselben Resultat käme man durch diese andere Nebenbedingung, dass $\varphi(x)$ sich nach Potenzen von x in eine convergirende Reihe entwickeln liesse. Denn wäre

$$\varphi(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots,$$

und folglich

$$\varphi(2x) = 2a_1 x + 4a_2 x^2 + 8a_3 x^3 + \cdots,$$

so würde aus (1) folgen, dass

$$2a_1 x + 2a_2 x^2 + 2a_3 x^3 + \cdots = 2a_1 x + 4a_2 x^2 + 8a_3 x^3 \cdots$$

sein müsste. Daraus würde weiter folgen:

$$a_2 = a_3 = \cdots = 0,$$

also $\varphi(x) = a_1 x$.

Bei unserer Aufgabe findet die zweite Nebenbedingung immer statt: wir wissen, dass $f(x)$ sich in eine convergirende, nach Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln lässt.

§. 29.

Da die in §. 27. mit x bezeichnete Grösse zwischen — 1 und + 1 liegt, so liegt auch

$$\frac{c - ax}{k - cx} = \frac{a}{c - b \cdot \frac{b}{c - ax}}$$

zwischen — 1 und + 1 (sogar zwischen 0 und + 1). Es sei

$$x_1 = \frac{c - ax}{k - cx}, \; x_2 = \frac{c - ax_1}{k - cx_1}, \; x_3 = \frac{c - ax_2}{k - cx_2} \text{ u. s. f.}$$

Gehen wir von einem beliebigen x aus, das zwischen — 1 und + 1 liegt, und bilden die Reihe $x_1, x_2 \cdots$; wohin verläuft sich diese Reihe?

1. Der Ausdruck

$$\varphi(x) = \frac{c - ax}{k - cx} = \frac{a}{c} + \frac{b^2}{c} \frac{1}{k - cx}$$

ändert sich offenbar, während x von $-\infty$ bis $\frac{k}{c}$ wächst, immer in demselben Sinn, d. h. er ist, so lange x zwischen $-\infty$ und $\frac{k}{c}$ liegt, um so grösser, je grösser x ist. Für den Werth $x = \frac{k}{c}$, der, wie leicht zu sehen, grösser als 1 ist, findet der Uebergang von ∞ nach $-\infty$ statt.

2. Ist ξ die zwischen 0 und 1 liegende Wurzel der Gleichung

$$c - (a + k)x + cx^2 = 0,$$

so ist

$$\begin{aligned} x &= x_1, \text{ wenn } x = \xi \text{ ist} \\ x &< x_1, \quad \text{„} \quad x < \xi \quad \text{„} \\ x &> x_1, \quad \text{„} \quad x > \xi \quad \text{„}. \end{aligned}$$

Es ist nämlich

$$x_1 - x = \frac{c - (a + k)x + cx^2}{k - cx}.$$

Der Divisor dieses Quotienten ist positiv, mithin hängt das Zeichen von $x_1 - x$ nur vom Dividendus ab. Letzterer hat zwei reelle Wurzeln, wie sofort einleuchtet, wenn man in $c - (a + k)\, x + cx^2$ für x die Werthe 0 und 1 setzt. Für $x = 0$ wird der Ausdruck gleich c, also positiv; für $x = 1$ wird er

$$2c - (a + k) = 2c - a - \frac{c^2 - b^2}{a} = \frac{b^2 - (c - a)^2}{a},$$

also negativ. Zwischen 0 und 1 liegt folglich die eine Wurzel der Gleichung

$$c - (a + k)x + cx^2 = 0.$$

Die andere Wurzel ist grösser als 1, da das Product beider Wurzeln 1 ist. Die zwischen 0 und 1 liegende Wurzel nennen wir ξ; die andere ist dann $\frac{1}{\xi}$. Also unter der Grenze 1 giebt es einen, und nur einen Werth, nämlich ξ, für den $x_1 = x$ ist. Da $x_1 - x$ für $x = 0$ positiv war, so ist $x_1 > x$, wenn $x < \xi$, und $x_1 < x$, wenn $x > \xi$.

3. Geht man nun erstens von einem x aus, welches zwischen -1 und ξ liegt, und bildet die Reihe $x_1, x_2 \cdots$, so lässt sich zeigen, dass sich die Glieder derselben dem Werth ξ als Grenze nähern. Denn bildet man die Function φ mit den Argumenten x und ξ, so ist, da x und ξ unter 1 liegen, und $\xi > x$ ist, nach 1.

$$\varphi(\xi) > \varphi(x).$$

Es ist aber $\varphi(\xi) = \xi$, $\varphi(x) = x_1$. Mithin haben wir

$$\xi > x_1.$$

Nach 2. ist ferner $x < x_1$, da $x < \xi$ ist. Gehen wir also von einem x aus, das unter ξ liegt, so ist

$$x < x_1 < \xi.$$

Da x_1 also auch unter ξ liegt, so ist aus denselben Gründen auch

$$x_1 < x_2 < \xi,$$

und ebenso

$$x_2 < x_3 < \xi$$

u. s. f. Wir haben also

$$x < x_1 < x_2 < x_3 \cdots < \xi.$$

Die Reihe der x wächst mithin nach dem ξ zu. Mit wachsendem n wird also x_n entweder den Werth ξ als Grenze haben, oder einen anderen Werth λ. Wäre letzteres der Fall, also $\lim x_n = \lambda$, so wäre auch $\lim x_{n+1} = \lambda$. Da aber

$$x_{n+1} = \frac{c - ax_n}{k - cx_n},$$

und folglich

$$\lim x_{n+1} = \lim \frac{c - ax_n}{k - cx_n},$$

so hätten wir

$$\lambda = \frac{c - a\lambda}{k - c\lambda},$$

d. h. λ wäre ein Argument, für das die Function φ dem Argumente gleich ist, d. h. λ müsste mit ξ zusammenfallen.

Nehmen wir zweitens ein x über ξ, aber unter 1, so dass $1 > x > \xi$ ist. In diesem Fall ist nach 2. $x > x_1$, und nach 1. $\varphi(x) > \varphi(\xi)$, d. h. $x_1 > \xi$. Mithin werden wir jetzt haben

$$x > x_1 > x_2 \cdots > \xi.$$

Hieraus folgt wieder, durch dieselben Schlüsse wie vorhin, dass $\lim x_n = \xi$ sein muss.

Also, ob das x, mit welchem wir die Reihe $x_1, x_2 \cdots$ bilden, unter oder über ξ liegt, immer ist, so lange nur $-1 < x < 1$:

$$\lim x_n = \xi,$$

wo ξ die zwischen 0 und 1 liegende Wurzel dieser Gleichung ist:

$$c - (a + k)x + cx^2 = 0.$$

§. 30.

Man setze nun in der Gleichung

$$f(x) - \frac{b}{k - cx} f\left(\frac{c - ax}{k - cx}\right) = \frac{1}{a}\left(P - \frac{b}{c - ax} Q\right)$$

zur Abkürzung

$$\frac{b}{k - cx} = g, \; \frac{1}{a}\left(P - \frac{b}{c - ax} Q\right) = h;$$

man bezeichne ferner die Werthe von g und h, welche den Argumenten $x_1, x_2 \cdots$ entsprechen, durch $g_1, g_2 \cdots; h_1, h_2 \cdots$: dann hat man

$$\begin{aligned}
f(x) - g\, f(x_1) &= h \\
f(x_1) - g_1 f(x_2) &= h_1 \\
f(x_2) - g_2 f(x_3) &= h_2 \\
&\cdots\cdots \\
f(x_n) - g_n f(x_{n+1}) &= h_n.
\end{aligned}$$

Durch Multiplication der zweiten, dritten $\cdots (n+1)^{\text{ten}}$ dieser Gleichungen resp. mit $g,\ gg_1 \cdots\cdot (gg_1\cdots g_{n-1})$, und nachherige Addition erhält man:

$$f(x)-(gg_1\cdots g_{n-1})f(x_{n+1})=h+gh_1+gg_1h_2+\cdots+(gg_1\cdots g_{n-1})h_n.$$

Mit wachsendem n nähert sich das zweite Glied der ersten Seite dieser Gleichung der Null. Denn der Factor $f(x_{n+1})$ wird nicht unendlich, weil sich x_{n+1} dem ξ, welches ja zwischen 0 und 1 liegt, nähert, und die Function $f(x)$, so lange x zwischen -1 und $+1$ liegt, sich in eine convergirende Reihe entwickeln lässt. Der andere Factor $gg_1\cdots g_{n-1}$ nähert sich aber, wie leicht zu sehen, der Null, da

$$\lim g_n = \frac{b}{k-c\xi}$$

kleiner als 1 ist; denn es war

$$c-(a+k)\xi+c\xi^2=0,$$

oder

$$c-a\xi+\xi(c\xi-k)=0,$$

folglich ist

$$k-c\xi=\frac{c-a\xi}{\xi},$$

also

$$\frac{b}{k-c\xi}=\frac{b\xi}{c-a\xi}.$$

Der letzte Ausdruck ist offenbar kleiner als 1, weil ξ kleiner als 1, und $c-a\xi$ grösser als b ist. Es ist demnach

$$f(x)=h+gh_1+gg_1h_2+\cdots\cdot \text{ in inf.}$$

Diese Reihe ist so gebildet, dass man jedes Glied, vom zweiten an, aus dem vorhergehenden erhält, wenn man darin x_1 statt x schreibt, und das Resultat mit g multiplicirt. Zerlegt man

$$h=\frac{P}{a}-\frac{b}{a}\frac{Q}{c-ax}$$

in die zwei Bestandtheile

$$\frac{P}{a} \text{ und } -\frac{b}{a}Q\cdot\frac{1}{c-ax},$$

so kann man die Reihe für $f(x)$ aus zwei Bestandtheilen zusammensetzen, weil h nur linear vorkommt. Wir bilden also die Reihe

$$A=h+gh_1+gg_1h_2+\cdots$$

für den Fall $h = \frac{1}{p - qx}$, und setzen dann erstens $p = 1$, $q = 0$, zweitens $p = c$, $q = a$, woraus wir die zwei Bestandtheile unserer Reihe, abgesehen von den constanten Factoren $\frac{P}{a}$ und $-\frac{b}{a}Q$, erhalten werden.

Das erste Glied der Reihe A ist also

$$\frac{1}{p - qx}.$$

Hierin sollen wir, um das zweite Glied gh_1 zu erhalten, statt x setzen $x_1 = \frac{c - ax}{k - cx}$, und das Resultat mit $g = \frac{b}{k - cx}$ multipliciren. Es wird also

$$gh_1 = \frac{b}{k - cx} \frac{1}{p - q\frac{c - ax}{k - cx}} = \frac{1}{p_1 - q_1 x},$$

wo p_1 und q_1 sich aus den Gleichungen

$$bp_1 = kp - cq$$
$$bq_1 = cp - aq$$

bestimmen. Da das dritte Glied ebenso aus dem zweiten entsteht, wie das zweite aus dem ersten, so können wir unmittelbar für das dritte Glied ansetzen

$$\frac{1}{p_2 - q_2 x},$$

wo

$$bp_2 = kp_1 - cq_1$$
$$bq_2 = cp_1 - aq_1$$

u. s. f. Wir haben demnach

$$A = \frac{1}{p - qx} + \frac{1}{p_1 - q_1 x} + \frac{1}{p_2 - q_2 x} + \cdots + \frac{1}{p_n - q_n x} + \cdots,$$

wo die Grössen $p_1; p_2 \cdots; q_1, q_2 \cdots$ aus folgenden Gleichungen zu bestimmen sind:

$$\left.\begin{array}{l} bp_1 = kp - cq, \quad bq_1 = cp - aq \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ bp_{n+1} = kp_n - cq_n, \; bq_{n+1} = cp_n - aq_n. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Für die Constanten p und q im ersten Gliede dieser Entwicklung haben wir, wie schon bemerkt, das eine Mal resp.

1 und 0, das andere Mal c und a zu setzen, so dass in jedem Fall

$$p > q \geqq 0$$

ist. Ueber die Constanten p_n, q_n in dem allgemeinen Gliede $\frac{1}{p_n - q_n x}$ machen wir noch folgende Bemerkungen.

1. Es ist immer $p_n > q_n$. Wir zeigen zunächst, dass $p_1 > q_1$ ist. Dies wird dann der Fall sein, wenn

$$kp - cq > cp - aq$$

oder

$$(k - c)p > (c - a)q$$

ist. Das ist wirklich der Fall, da $p > q$ und $k - c > c - a$ ist. Da nun $p_1 > q_1$ ist, so lässt sich eben so zeigen, dass auch

$$p_2 > q_2,\ p_3 > q_3 \text{ u. s. f.}$$

ist. Alle Glieder der Entwicklung von A lassen sich daher in eine convergirende, nach Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln.

2. Es ist immer $q_n > 0$, wenn $n > 0$ ist. Denn ist irgend ein q, etwa $q_n = 0$, so ist das folgende q, also q_{n+1}, schon positiv, da

$$bq_{n+1} = cp_n - aq_n$$

und $c > a$, $p_n > q_n$ ist.

3. Die Grössen p_n und q_n lassen sich beide als die Summe von zwei allgemeinen Gliedern zweier geometrischen Reihen darstellen.

Wir setzen an

$$p_n = \varrho\,\omega^n,\quad q_n = \sigma\,\omega^n$$

und sehen zu, ob Ausdrücke von dieser Form den Gleichungen (1) genügen. Es müsste also sein:

$$\begin{aligned} b\varrho\,\omega^{n+1} &= k\varrho\,\omega^n - c\sigma\,\omega^n \\ b\sigma\,\omega^{n+1} &= c\varrho\,\omega^n - a\sigma\,\omega^n \end{aligned}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} b\varrho\,\omega &= k\varrho - c\sigma \\ b\sigma\,\omega &= c\varrho - a\,\sigma. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Hieraus bestimmt sich die Constante ω als Wurzel einer quadratischen Gleichung, während von den beiden anderen

Constanten ϱ und σ nur das Verhältniss zu einander bestimmt ist. Aus (2) folgt nämlich

$$c\sigma = \varrho(k - b\omega)$$
$$c\varrho = \sigma(a + b\omega),$$

woraus wir weiter schliessen, dass

$$\frac{\sigma}{\varrho} = \frac{k - b\omega}{c} = \frac{c}{a + b\omega} \tag{3}$$

und folglich

$$c^2 = (k - b\omega)(a + b\omega)$$

oder

$$b^2\omega^2 + b(a - k)\omega + c^2 - ak = 0,$$

oder, wegen $c^2 - ak = b^2$,

$$b\omega^2 + (a - k)\omega + b = 0$$

sein muss. Diese Gleichung hat eine positive reelle Wurzel, die zwischen 0 und 1 liegt, und da die Gleichung reciprok ist, so muss, wenn die eine ω ist, die andere $\frac{1}{\omega}$ sein. Aus (3) ist ersichtlich, dass das Verhältniss $\frac{\sigma}{\varrho}$ mit dem ω völlig bestimmt ist. Also es bleibt bloss ϱ willkürlich. Eine particuläre Auflösung der Gleichungen (1) wäre also diese:

$$p_n = \varrho\omega^n, \; q_n = \varrho\frac{k - b\omega}{c}\omega^n,$$

und eine andere diese:

$$p_n = \varrho'\omega^{-n}, \; q_n = \varrho'\frac{k - \frac{b}{\omega}}{c}\omega^{-n}.$$

Die Summe dieser beiden particulären Auflösungen, nämlich

$$p_n = \varrho\omega^n + \varrho'\omega^{-n}$$
$$q_n = \varrho\frac{k - b\omega}{c}\omega^n + \varrho'\frac{k - \frac{b}{\omega}}{c}\omega^{-n},$$

muss also auch den Gleichungen (1) genügen. In dieser Auflösung ist aber *alles* bestimmt: denn für $n = 0$ hat man

$$p_0 = \varrho + \varrho'$$
$$q_0 = \varrho\frac{k - b\omega}{c} + \varrho'\frac{k - \frac{b}{\omega}}{c}.$$

Durch diese beiden Gleichungen sind auch ϱ und ϱ' in beiden

Fällen bestimmt; denn p_0 und q_0 sind ja gegeben. In dem einen Fall ist $p_0 = 1$, $q_0 = 0$, in dem anderen $p_0 = c$, $q_0 = a$.

Für $f(x)$ ergiebt sich nunmehr folgender Ausdruck:

$$f(x) = \frac{P}{a} \sum_0^\infty \frac{1}{p_n - q_n x} - \frac{Qb}{a} \sum_0^\infty \frac{1}{p_n' - q_n' x}, \tag{4}$$

wo

$$p_0 = 1,\ q_0 = 0$$
$$p_n = \varrho \omega^n + \varrho' \omega^{-n}$$
$$q_n = \varrho \frac{k - b\omega}{c} \omega^n + \varrho' \frac{k - \frac{b}{\omega}}{c} \omega^{-n}$$
$$k = \frac{c^2 - b^2}{a}$$
$$b\omega^2 + (a - k)\omega + b = 0$$
$$\varrho = \frac{k - \frac{b}{\omega}}{b\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)},\ \varrho' = \frac{b\omega - k}{b\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)}$$
$$p_0' = c,\ q_0' = a$$
$$p_n' = \varrho_1 \omega^n + \varrho_1' \omega^{-n}$$
$$q_n' = \varrho_1 \frac{k - b\omega}{c} \omega^n + \varrho_1' \frac{k - \frac{b}{\omega}}{c} \omega^{-n}$$
$$\varrho_1 = \frac{c\left(k - a - \frac{b}{\omega}\right)}{b\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)},\ \varrho_1' = \frac{c(b\omega - k + a)}{b\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right)}.$$

Die beiden Reihen

$$\sum_0^\infty \frac{1}{p_n - q_n x},\ \sum_0^\infty \frac{1}{p_n' - q_n' x}$$

sind convergent, wie leicht zu sehen.

Die Formel für $F(y)$ erhält man offenbar aus der für $f(x)$ durch Vertauschung von P mit Q, und a mit b. Demnach ist

$$F(y) = \frac{Q}{b} \sum_0^\infty \frac{1}{r_n - s_n y} - \frac{Pa}{b} \sum_0^\infty \frac{1}{r_n' - s_n' y},$$

wo

$$r_0 = 1,\ s_0 = 0$$
$$r_n = \sigma\omega_1^n + \sigma'\omega_1^{-n}$$
$$s_n = \sigma\frac{k_1 - a\omega_1}{c}\omega_1^n + \sigma'\frac{k_1 - \frac{a}{\omega_1}}{c}\omega_1^{-n}$$
$$k_1 = \frac{c^2 - a^2}{b}$$
$$a\omega_1^2 + (b - k_1)\omega_1 + a = 0$$
$$\sigma = \frac{k_1 - \frac{a}{\omega_1^2}}{a\left(\omega_1 - \frac{1}{\omega_1}\right)},\ \sigma' = \frac{a\omega_1 - k_1}{a\left(\omega_1 - \frac{1}{\omega_1}\right)}$$
$$r_0' = c,\ s_0' = b$$
$$r_n' = \sigma_1\omega_1^n + \sigma_1'\omega_1^{-n}$$
$$\sigma_1 = \frac{c\left(k_1 - b - \frac{a}{\omega_1}\right)}{a\left(\omega_1 - \frac{1}{\omega_1}\right)},\ \sigma_1' = \frac{c(a\omega_1 - k_1 + b)}{a\left(\omega_1 - \frac{1}{\omega_1}\right)}. \text{ [26]}$$

Es ist noch nachzusehen, wie sich die Constanten P und Q bestimmen. Es war

$$f(x) = \sum \frac{\alpha_m}{2m+1} x^m \tag{5}$$

und

$$k = \Sigma\, \alpha_m P_m(\cos\vartheta).$$

Wenn es sich um eine Kugeloberfläche handelt, und die Dichtigkeit auf derselben nach Kugelfunctionen entwickelt ist, so ist das erste Glied α_0 (§. 24.) gleich dem Quotienten

$$\frac{\text{Elektricitätsmenge}}{\text{Kugeloberfläche}}.$$

Bezeichnen wir also die der Kugel A mitgetheilte Elektricitätsmenge durch A, so ist

$$\alpha_0 = \frac{A}{4\pi a^2}.$$

Andererseits ist aber [wegen (5)]

$$\alpha_0 = f(0).$$

Hieraus folgt

$$af(0) = \frac{A}{4\pi a}$$

aus (4) folgt aber

$$a f(0) = P \sum \frac{1}{p_n} - Qb \sum \frac{1}{p'_n};$$

mithin ist

$$\frac{A}{4\pi a} = P \sum \frac{1}{p_n} - Qb \sum \frac{1}{p'_n}.$$

Auf dieselbe Weise, oder auch unmittelbar durch eine Vertauschung der Buchstaben, findet man:

$$\frac{B}{4\pi b} = Q \sum \frac{1}{r_n} - Pa \sum \frac{1}{r'_n},$$

wenn man mit B die der Kugel B mitgetheilte Elektricitätsmenge bezeichnet. Aus den beiden letzten Gleichungen erhält man schliesslich:

$$P = \frac{\frac{A}{a} \Sigma \frac{1}{r_n} + B \Sigma \frac{1}{p'_n}}{4\pi\left(\Sigma \frac{1}{p_n} \Sigma \frac{1}{r_n} - ab \Sigma \frac{1}{p'_n} \Sigma \frac{1}{r'_n}\right)}$$

$$Q = \frac{\frac{B}{b} \Sigma \frac{1}{p_n} + A \Sigma \frac{1}{r'_n}}{4\pi\left(\Sigma \frac{1}{p_n} \Sigma \frac{1}{r_n} - ab \Sigma \frac{1}{p'_n} \Sigma \frac{1}{r'_n}\right)}.$$

Also die Constanten P und Q bestimmen sich aus den Elektricitätsmengen, welche den Kugeln ursprünglich mitgetheilt sind.

§. 31.

Wir müssen jetzt, um die Grössen α zu bestimmen, $f(x)$ nach Potenzen von x entwickeln. Es ist

$$\frac{1}{p_n - q_n x} = \frac{1}{p_n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{q_n}{p_n}\right)^m x^m.$$

Also der eine Bestandtheil von dem Coefficienten der Potenz x^m in der Entwicklung der Function $f(x)$ oder von $\frac{\alpha_m}{2m+1}$ ist

$$\frac{P}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n^m}{p_n^{m+1}};$$

der zweite ist

$$-\frac{Qb}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q'^m_n}{p'^{m+1}_n}.$$

Mithin ist $P_m(\cos\vartheta)\,\alpha_m =$

$$(2m+1)\left(\frac{P}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_n^m}{p_n^{m+1}} - \frac{Qb}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_n'^m}{p_n'^{m+1}}\right)P_m(\cos\vartheta).$$

Dies ist das allgemeine Glied der Entwicklung der Dichtigkeit k auf der Kugel A; folglich ist

$$k = \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\left(\frac{P}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_n^m}{p_n^{m+1}} - \frac{Qb}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_n'^m}{p_n'^{m+1}}\right)P_m(\cos\vartheta).$$

Wir können die auf n und m bezüglichen Summationen umkehren, wodurch wir erhalten:

$$k = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{P}{a}\frac{1}{p_n}\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\,P_m(\cos\vartheta)\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^m\right.$$
$$\left. - \frac{Qb}{a}\frac{1}{p_n'}\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\,P_m(\cos\vartheta)\left(\frac{q_n'}{p_n'}\right)^m\right).$$

Die beiden auf m bezüglichen Summen lassen sich in geschlossener Form angeben; wir fanden früher (§. 25.):

$$\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\,P_m(\cos\vartheta)\,\alpha^m = \frac{1-\alpha^2}{(1-2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wo $\alpha < 1$ ist. Folglich ist

$$\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\,P_m(\cos\vartheta)\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^m = \frac{p_n^3 - p_n q_n^2}{(p_n^2 - 2p_n q_n\cos\vartheta + q_n^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Demnach erhält man schliesslich:

$$k = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(P\frac{p_n^2 - q_n^2}{(p_n^2 - 2p_n q_n\cos\vartheta + q_n^2)^{\frac{3}{2}}} - Qb\frac{p_n'^2 - q_n'^2}{(p_n'^2 - 2p_n' q_n'\cos\vartheta + q_n'^2)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Also unsere Dichtigkeit ist durch zwei unendliche Reihen ausgedrückt, in denen der Nenner des allgemeinen Gliedes die $(\frac{3}{2})^{\text{te}}$ Potenz von einem Trinom ist, die p und q aber die Summe von zwei allgemeinen Gliedern geometrischer Reihen sind.[27])

Die auf der Kugel B stattfindende Dichtigkeit l findet man hieraus durch blosse Vertauschung von P mit Q, und von a mit b. Diese Vertauschung involvirt natürlich eine Vertauschung der p und q mit den entsprechenden r und s.

Sechster Abschnitt.

Allgemeine Probleme und Sätze in Bezug auf eine mit Masse belegte Fläche.

§. 32.

Das Ziel der folgenden Untersuchungen ist, zu beweisen, dass immer eine solche Belegung der Oberfläche eines geschlossenen Raumes, oder der Oberflächen mehrerer geschlossener Räume, mit Masse möglich ist, dass das Potential in jedem Punkt der Oberflächen einen vorgeschriebenen Werth annimmt. Die Möglichkeit einer derartigen Belegung beruht auf folgendem Satz:

Es giebt immer eine und nur eine Function u von x, y, z für einen beliebigen begrenzten Raum, die selbst und deren Differentialquotienten erster Ordnung stetig sind, die innerhalb jenes ganzen Raumes die Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$$

erfüllt, und sich in jedem Punkt der Oberfläche auf einen gegebenen Werth reducirt.[28])

Die Aufgabe, jene Function u zu finden, lässt sich nicht lösen: es kann nur von einem Existenznachweis derselben die Rede sein. Letzterer hat keine Schwierigkeit.

Es giebt offenbar für jeden begrenzten zusammenhängenden Raum T unendlich viele mit x, y, z stetige und auch in ihren Differentialquotienten erster Ordnung stetige Functionen u, die sich auf der Oberfläche desselben auf einen gegebenen Werth reduciren. Unter diesen Functionen wird wenigstens eine sein, die das folgende, über den Raum T zu erstreckende Integral

$$U = \int \left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2 \right) dT$$

auf ein Minimum reducirt; denn es liegt auf der Hand, dass dies Integral ein Minimum hat, da es nicht negativ werden kann. Nun lässt sich Folgendes zeigen:

1. Eine jede jener Functionen u, welche U zu einem Minimum macht, genügt überall in dem Raum T der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0. \tag{1}$$

Damit wäre schon nachgewiesen, dass es immer eine Function u von der verlangten Beschaffenheit giebt, nämlich eben jene Function, für welche U ein Minimum wird.

2. Jede der Functionen u, welche etwa der Differentialgleichung (1) innerhalb des Raumes T genügen sollte, macht das Integral U zu einem Minimum.

3. Das Integral U kann nur Ein Minimum haben.

Aus 2. und 3. würde folgen, dass es nur eine Function u von der verlangten Beschaffenheit giebt.

Eine jener Functionen u, für welche U einen Minimumwerth hat, sei v. Jedes andere u wird sich in die Form

$$u = v + hw$$

bringen lassen, wo h eine beliebige Constante ist, und w irgend eine Function bezeichnet, die auf der Oberfläche des Raumes T überall 0 ist und im Innern selbst und in ihren ersten Differentialquotienten überall stetig ist. Bezeichnen wir den Minimumwerth des Integrals, welcher stattfindet, wenn man u gleich v setzt, durch V, und den Werth, welchen es für irgend ein anderes $u = v + hw$ annimmt, durch U, so haben wir, wegen

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} + h\frac{dw}{dx}$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dy} + h\frac{dw}{dy}$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} + h\frac{dw}{dz}$$

folgende Gleichung

$$U = V + 2hM + h^2N,$$

oder

$$U - V = 2hM + h^2N \tag{2}$$

wo

$$M = \int\left(\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx} + \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\frac{dw}{dz}\right) dT,$$

$$N = \int\left(\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right) dT.$$

Da V ein Minimumwerth ist, so kann die zweite Seite der Gleichung (2) nicht negativ sein. Daraus folgt, dass M nothwendig gleich Null sein muss; denn sonst könnte man das Zeichen von h so bestimmen, dass $2hM$ negativ würde, und den absoluten Werth von h so bestimmen, dass $h^2 N$ kleiner würde als $2hM$. Nun ist aber nach §. 7., wenn man bedenkt, dass die Function w an der Oberfläche überall den Werth Null hat,

$$M = -\int\left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2}\right) w\, dT.$$

Damit dies Null werde, muss der Complex $\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2}$ in dem Raum T überall gleich Null sein. Denn wäre er nicht gleich Null, so könnte man w, welches ja im Innern eine beliebige Function ist, so annehmen, dass es überall mit jenem Complex dasselbe Zeichen hätte; dann würde man ein Integral haben, das aus lauter Elementen gleichen Vorzeichens besteht, das also nicht Null sein könnte. Es könnte freilich in isolirten Punkten, Linien oder Flächen das Trinom nicht Null sein, denn dann würde das Integral doch Null sein. Allein es lässt sich leicht zeigen, dass ein solcher Ausdruck in einem zusammenhängenden Raum in Folge der Stetigkeit nicht bloss in Punkten, Linien oder Flächen von Null verschieden sein kann. Hiermit ist die Behauptung 1. bewiesen.

Dass ferner, wie in 2. behauptet wird, jedes U, welches einem u entspricht, das der Gleichung (1) im ganzen Raum T genügt, ein Minimum ist, leuchtet auf der Stelle ein.

Es bleibt noch zu beweisen, dass das Integral nur Ein Minimum hat. Existirte also ausser der Function v noch eine andere $v + w$, welche dasselbe zu einem Minimum macht, dann würde der Werth V', den es für $v + w$ annimmt, nicht grösser sein als U, d. i. der Werth, den es

für $v + hw$ annimmt, wenn h unendlich wenig von 1 verschieden ist. Es ist aber nach (2), da $M = 0$ ist,

$$U = V + h^2 N,$$

folglich wenn wir hierin $h = 1$ setzen,

$$V' = V + N,$$

so dass $V + N \leqq V + h^2 N$ sein müsste, oder

$$N \leqq h^2 N.$$

Für ein h, welches grösser als 1 ist, kann dieser Bedingung nur dadurch genügt werden, dass $N = 0$ gesetzt wird. Daraus folgt aber, dass innerhalb des Raumes T überall

$$\frac{dw}{dx} = 0, \frac{dw}{dy} = 0, \frac{dw}{dz} = 0,$$

d. h. $w =$ Const. ist. Da w an der Oberfläche den Werth Null hat, so kann diese Constante nur Null sein.

Des kürzeren Ausdruckes wegen setzen wir Folgendes fest:

Ueberall, wo in der Folge von einem für einen bestimmten, endlichen oder unendlichen, Raum T gegebenen oder zu bestimmenden u die Rede ist, soll darunter eine Function verstanden werden, welche überall innerhalb jenes Raumes T folgenden Bedingungen genügt:

1) $u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$ sind stetig;

2) $$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0.$$

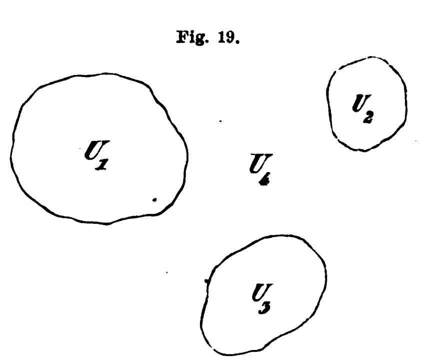
§. 33.

Es lassen sich immer die Oberflächen beliebig vieler begrenzter Räume so mit Masse belegen, dass das Potential der Masse an jeder Stelle einer jeden Oberfläche einen vorgeschriebenen Werth hat; es ist aber auch nur eine solche Belegung möglich.

Hätte man etwa drei Flächen, also vier Räume, U_1, U_2, U_3, U_4, von denen einer, U_4, unendlich ist (Fig. 19), und sind die Werthe, welche das Potential auf den Oberflächen der Räume U_1, U_2, U_3 annehmen soll, resp. v_1, v_2, v_3, dann bestimme man zunächst für die drei endlichen Räume U_1, U_2, U_3 diejenigen Functionen u, welche sich auf den Oberflächen jener

drei Räume auf v_1, v_2, v_3 resp. reduciren: diese Bestimmung ist immer möglich und zwar nur auf eine Weise (§. 32.). Wir wollen jene drei Functionen durch u_1, u_2, u_3 resp. bezeichnen. Darauf bestimme man für den unendlichen Raum U_4 eine Function u, welche sich an den Oberflächen der Räume U_1, U_2, U_3 auf v_1, v_2, v_3 reducirt, und im Unendlichen verschwindet. Wir werden nachträglich zeigen, dass immer eine und nur eine solche Function u für den unendlichen Raum existirt, und dass dieselbe den weiteren Bedingungen genügt, dass ϱu und $\varrho^2 \frac{du}{d\varrho}$ nicht über eine bestimmte Grenze hinaus wachsen. Wir wollen diese Function mit u_4 bezeichnen. Die Dichtigkeit k der über die drei Flächen zu vertheilenden Masse richten wir so ein, dass dieselbe für die Oberflächen der drei Räume U_1, U_2, U_3 resp. folgenden Gleichungen genügt:

Fig. 19.



$$\left(\frac{du_4}{dp}\right)_{\alpha+\varepsilon} - \left(\frac{du_1}{dp}\right)_{\alpha-\varepsilon} = -4\pi k$$

$$\left(\frac{du_4}{dp}\right)_{\alpha+\varepsilon} - \left(\frac{du_2}{dp}\right)_{\alpha-\varepsilon} = -4\pi k$$

$$\left(\frac{du_4}{dp}\right)_{\alpha+\varepsilon} - \left(\frac{du_3}{dp}\right)_{\alpha-\varepsilon} = -4\pi k.$$

Dann werden die drei Flächen so mit Masse belegt sein, wie es verlangt wurde, dass nämlich das Potential der Belegung auf der ersten, zweiten, dritten Fläche sich auf v_1, v_2, v_3 resp. reducirt. Denn bezeichnen wir mit v diejenige für den *ganzen* unendlichen Raum (mit Einschluss der Räume U_1, U_2, U_3) gegebene Function, welche in den einzelnen Räumen U_1, U_2, U_3, U_4 die Werthe u_1, u_2, u_3, u_4 hat, so besitzt dieselbe offenbar die vier charakteristischen Eigenschaften des Potentials jener Belegung (§. 15.):

1) Die Function v ist im ganzen unendlichen Raum stetig.

Es sind nämlich erstens u_1, u_2, u_3, u_4 in den einzelnen Räumen stetig; da ferner u_1 und u_4 beide auf der Oberfläche des Raumes U_1 denselben Werth v_1 annehmen, so ändert sich v auch stetig beim Uebergang vom Raum U_4 in den Raum U_1 u. s. w.

2) Ausserhalb der Flächen sind alle Derivirten von v stetig und

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} = 0.$$

Denn dies gilt von den einzelnen Functionen u_1, u_2, u_3, u_4 innerhalb der einzelnen Räume.

3) Es ist in jedem Punkt der mit Masse belegten Flächen

$$\left(\frac{dv}{dp}\right)_{\alpha+\varepsilon} - \left(\frac{dv}{dp}\right)_{\alpha-\varepsilon} = -4\pi k.$$

Denn die Dichtigkeit k ist überall dieser Gleichung gemäss bestimmt.

4) $v\varrho$, $\varrho^2 \frac{dv}{d\varrho}$ sind immer endliche Werthe: weil nämlich $u_4\varrho$, $\varrho^2 \frac{du_4}{d\varrho}$ immer endliche Werthe sind, wie ja nachträglich gezeigt werden soll.

Mithin ist v nach §. 15. das Potential jener Belegung. Die Function v nimmt aber andrerseits auf den Oberflächen der einzelnen Räume die vorgeschriebenen Werthe v_1, v_2, v_3 an.

Man sieht zugleich, dass die Aufgabe nur eine Lösung hat (wenn nämlich nachgewiesen ist, dass u_4 sich nur auf eine Weise den Bedingungen gemäss bestimmen lässt).

Zur Erläuterung diene folgendes Beispiel. Die zu belegende Fläche sei eine Kugelfläche mit dem Radius R, und der vorgeschriebene Potentialwerth sei ax, wo a eine Constante bedeutet, über die wir noch näher verfügen werden. Die für den inneren Raum stattfindende Function u hat offenbar den Werth ax; denn ax ist ein u, und reducirt sich an der Oberfläche auf den vorgeschriebenen Werth, der ja ax selbst ist. Für den unendlichen Raum genügt die Function $\frac{x}{\varrho^3}$, wenn wir die Constante $a = \frac{1}{R^3}$ setzen: denn an der Oberfläche nimmt $\frac{x}{\varrho^3}$ den Werth $\frac{x}{R^3}$ an. Da nun

$u_1 = \frac{x}{R^3}$, und $u_2 = \frac{x}{\varrho^3}$ zwei Ausdrücke sind, die resp. im inneren und äusseren Raum genügen, so kann man aus denselben die gesuchte Belegung unmittelbar ableiten, deren Potential an der Oberfläche den vorgeschriebenen Werth $\frac{x}{R^3}$ annimmt. Da für die Kugelfläche die Normale p mit dem *radius vector* ϱ zusammenfällt, so wird

$$-4\pi k = \left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_{R+\varepsilon} - \left(\frac{dv}{d\varrho}\right)_{R-\varepsilon} = \left(\frac{du_2}{d\varrho}\right)_{\varrho=R} - \left(\frac{du_1}{d\varrho}\right)_{\varrho=R},$$

woraus man

$$k = \frac{3x}{4\pi R^4}$$

findet.

§. 34.

Jetzt kommen wir zu dem Nachweis, dass die Function u für einen unendlichen Raum völlig bestimmt ist. Zunächst haben wir zwei allgemeine Principien auszusprechen.

1. Hat man einen endlichen, von zwei geschlossenen Flächen schalenförmig begrenzten Raum, für welchen man das u sucht, welches an der einen Fläche den Werth U_1, an der anderen den Werth U_2 annimmt, so kann man das Problem nach dem Princip der Superposition in zwei einfachere Probleme verwandeln. Wir setzen nämlich

$$U_1 = U_1' + U_1''$$
$$U_2 = U_2' + U_2''$$

und suchen nun das u, welches auf der ersten Fläche den Werth U_1', auf der zweiten den Werth U_2' hat, und auch das u, welches auf der ersten Fläche den Werth U_1'', auf der zweiten den Werth U_2'' hat: addiren wir dann diese zwei u, so ist die Summe offenbar das gesuchte u.

2. Irgend eine Function u hat innerhalb eines zusammenhängenden Raumes T nur Werthe, welche zwischen den extremen an der Oberfläche stattfindenden Werthen liegen.

Der Beweis dieses Princips beruht auf folgendem Satz:

> Wenn eine Function u in allen Punkten der Grenzfläche eines geschlossenen Raumes denselben Werth c hat, so gilt derselbe Werth c auch für sämmtliche Punkte des Raumes selbst.

Eine jede Constante ist nämlich auch ein u (unter u immer eine Function verstanden, wie sie am Schluss des §. 32. definirt ist). Wenn wir also für einen Raum ein u suchen, welches an der Oberfläche des Raumes den constanten Werth c annimmt, so ist c selbst offenbar ein solches u. Ein u existirt aber immer nur für jeden Raum, welches an der Oberfläche den vorgeschriebenen Werth annimmt (§. 32.), folglich kann das gesuchte u nur den Werth c haben.

Beiläufig sei hier noch Folgendes bemerkt. Da das Potential von Massen, die ganz ausserhalb eines von einer geschlossenen Fläche begrenzten Raumes liegen, auch ein u ist, so hat man folgenden Satz, von dem wir später Gebrauch zu machen haben:

> Wenn das Potential von Massen, die ganz ausserhalb eines zusammenhängenden endlichen Raumes liegen, überall auf der Oberfläche desselben constant ist, so hat es auch überall im Innern denselben constanten Werth.

Das unter 2. ausgesprochene Princip lässt sich nun leicht beweisen. Das Maximum des u auf der Oberfläche des Raumes T sei A. Nehmen wir an, es habe das u in irgend einem Punkt O innerhalb des Raumes T einen Werth C, so dass $A < C$ ist. Es sei ferner B eine zwischen A und C fallende Grösse. Lässt man von O nach allen Richtungen hin gerade Linien ausgehen (Fig. 20.), so wird es auf jeder derselben einen Punkt O' geben, in welchem $u = B$ wird. Dies folgt unmittelbar aus der Stetigkeit des u. Sämmtliche Punkte O' bilden dann eine geschlossene Fläche. Da nun überall auf derselben $u = B$ ist, so muss u nach dem eben bewiesenen Satz auch überall in dem von derselben eingeschlossenen Raum denselben Werth B haben, während doch in O der grössere Werth C stattfindet. Die Voraussetzung führt also auf einen Widerspruch.

Fig. 20.

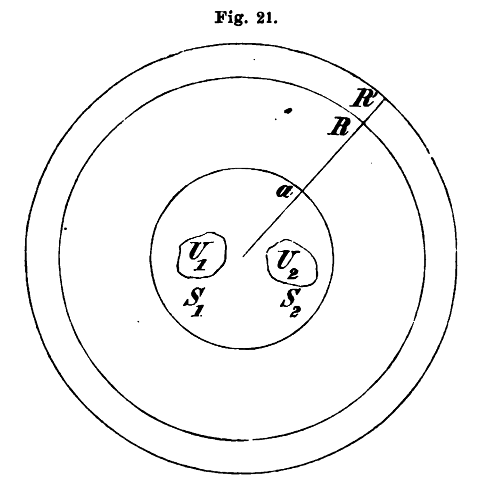
Ebenso zeigt man, dass das u in keinem Punkt des Raumes T einen Werth haben kann, der kleiner ist als das Minimum des u auf der Oberfläche.

§. 35.

Mittelst dieser einfachen Principien ist es leicht nachzuweisen, dass das u völlig bestimmt ist, welches für einen unendlichen Raum stattfindet.

Die mit Masse zu belegenden geschlossenen Flächen seien S_1, $S_2 \cdots$, und die Werthe, welche das Potential auf denselben annehmen soll, U_1, $U_2 \cdots$ (Fig. 21.). Man beschreibe eine Hilfskugel von einem beliebigen Punkt, mit einem beliebigen Radius a, aber so dass sie sämmtliche von

Fig. 21.



den Flächen S_1, $S_2 \cdots$ begrenzten Räume in sich enthält. Man beschreibe von demselben Punkte aus eine zweite Kugel mit einem beliebigen Radius R. Ein u innerhalb des von letzterer begrenzten Raumes (mit Ausschluss der von S_1, $S_2 \cdots$ begrenzten Räume) ist völlig bestimmt, wenn es an den Flächen S_1, $S_2 \cdots$ die Werthe U_1, $U_2 \cdots$, und an der R-Kugeloberfläche den Werth Null annehmen soll (§. 32.). Die Behauptung ist nun diese: Lässt man R wachsen, so wird sich u an jeder Stelle einem vollständig bestimmten Werth nähern, und die weiteren Bedingungen, dass ϱu und $\varrho^2 \frac{du}{d\varrho}$

nicht wachsen, erfüllen. Es ist oft schwer zu zeigen, dass sich etwas einer Grenze nähert: wir werden nachweisen, dass wenn R immer mehr wächst, sich u schliesslich nicht mehr um etwas beliebig Kleines ändern kann. Ein ähnliches Verfahren findet mitunter auch bei Reihen Anwendung, deren Convergenz nachzuweisen ist.

Der kleinste Werth von R soll wenigstens $2a$ sein. Sei nun u an irgend einer Stelle O innerhalb der R-Kugel für ein bestimmtes R bestimmt: was wird das u an dieser Stelle für eine Aenderung erleiden, wenn R grösser wird, wenn R gleich R' wird? Ist die R'-Kugelfläche die Begrenzungsfläche, auf welcher u den Werth Null annehmen soll, so hat u auf der R-Kugelfläche einen bestimmten Werth, den wir λ nennen wollen. Für die R-Kugelfläche als Begrenzungsfläche, auf der u den Werth 0 haben soll, werde der Werth des u in O durch u_R bezeichnet; für die R'-Kugelfläche als Begrenzungsfläche, auf welcher u den Werth 0 annehmen soll, werde der Werth des u in demselben Punkt O durch $u_{R'}$ bezeichnet. Es würde $u_{R'}$ bestimmt sein durch λ und die für die Flächen $S_1, S_2 \cdots$ vorgeschriebenen Werthe $U_1, U_2 \cdots$ Um das $u_{R'}$ zu finden, machen wir Gebrauch von dem Princip der Superposition, indem wir $U_1, U_2 \cdots$ in $U_1 + 0, U_2 + 0 \cdots$, und umgekehrt λ in $0 + \lambda$ zerlegen. Den Werth desjenigen u in O, welches auf den Flächen $S_1, S_2 \cdots$ die Werthe $a, b \cdots$, und auf der R-Kugelfläche den Werth k annimmt, wollen wir der Kürze halber durch $(a, b, \cdots, k)$ bezeichnen. Dann ist

$$u_R = (U_1, U_2, \cdots, 0)$$
$$u_{R'} = (U_1, U_2, \cdots, \lambda).$$

Da nun nach dem Princip der Superposition

$$(U_1, U_2, \cdots, \lambda) = (U_1, U_2, \cdots, 0) + (0, 0, \cdots, \lambda)$$

und folglich

$$u_{R'} = u_R + (0, 0, \cdots, \lambda)$$

ist, so wird der Zuwachs, den das u in dem Punkte O erleidet, wenn der Raum, der ursprünglich durch die R-Kugelfläche begrenzt war, durch die R'-Kugelfläche begrenzt wird, gleich $(0, 0, \cdots, \lambda)$ sein. Dieser letzte Werth liegt aber,

da der Werth irgend eines u innerhalb eines zusammenhängenden Raumes, nach dem zweiten Princip des §. 34., immer zwischen den extremen Werthen des u an der Oberfläche jenes Raumes liegt, zwischen den extremen Werthen des λ. Ist also l der absolut grösste Werth von λ, so wird der Zuwachs, den u in einem bestimmten Punkt O erleidet, der innerhalb der R-Kugelfläche liegt, wenn der Raum erst durch die R-Kugelfläche begrenzt war und dann durch die R'-Kugelfläche begrenzt wird, zwischen $+l$ und $-l$ liegen, also nicht grösser sein als l. Es entsteht also die Frage: Wie gross kann dieses l höchstens sein?

Wir brauchen jetzt jene Hilfskugel mit dem Radius a. Soll u auf der R'-Kugelfläche 0 sein, so wird der absolut grösste Werth von u auf der Hilfskugel höchstens A sein, wenn A den absolut grössten Werth der Grössen U_1, $U_2 \cdots$ bezeichnet. Denn alle Werthe auf der Hilfskugel liegen zwischen $\pm A$. Durch den auf der Hilfskugel stattfindenden Werth, den wir mit μ bezeichnen wollen, ist das u bestimmt von der Hilfskugelfläche bis zur R'-Kugelfläche. Mit Benutzung der beiden Principien des vorhergehenden Paragraphen zeigt man leicht, dass wenn man auf der einen Grenzfläche eines schalenförmigen Raumes die Werthe des u nicht ändert, sie auf der anderen Grenzfläche aber überall in demselben Sinne ändert, dann auch überall im Innern das u sich in demselben Sinne ändert.[29]) Setzen wir auf der Hilfskugel überall A statt μ, so vergrössern wir dort die Werthe des u, dadurch vergrössern wir also auch alle Werthe im Raum; setzen wir zweitens auf der Hilfskugel überall $-A$ statt μ, so verringern wir sie alle. Die zwei u, von denen das eine die Werthe A und 0, das andere die Werthe $-A$ und 0 auf der Hilfskugel und der R'-Kugel resp. annimmt, schliessen das wirklich stattfindende u an jeder Stelle ein. Suchen wir jene zwei u, so ist klar, dass jedes derselben eine blosse Function vom *radius vector* ϱ ist; für diesen Fall fanden wir (§. 5.) als Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=0$$

den Ausdruck

$$u = m + \frac{n}{\varrho}.$$

Die Constanten m und n bestimmen sich für das erste u durch die Bedingungen, dass dasselbe die Werthe A und 0 für $\varrho = a$ und $\varrho = R'$ resp. annehmen soll, und für das zweite u durch die Bedingungen, dass dasselbe die Werthe $-A$ und 0 für dieselben Werthe des ϱ annehmen soll. Es ist also

$$m + \frac{n}{a} = \pm A$$

$$m + \frac{n}{R'} = 0,$$

wo auf der zweiten Seite der ersten Gleichung das obere Zeichen für das erste u, das untere für das zweite u gilt. Bestimmt man hieraus m und n für jedes der beiden u, so ergiebt sich, dass der an jeder Stelle wirklich stattfindende Werth des u zwischen

$$\pm \frac{A}{\frac{1}{a} - \frac{1}{R'}} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R'}\right)$$

liegt, oder da $R \geqq 2a$ vorausgesetzt ist, mithin $\frac{1}{a} - \frac{1}{R'} \geqq 2a$ ist, zwischen

$$\pm 2Aa \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R'}\right),$$

also *a fortiori* zwischen

$$\pm \frac{2Aa}{\varrho}.$$

Auf der Oberfläche der R-Kugel ist folglich $\frac{2Aa}{R}$ obere, und $-\frac{2Aa}{R}$ untere Grenze; $2Aa$ ist eine Constante: wenn also R gross genug ist, so ist der absolut grösste Werth, den λ noch erreichen kann, beliebig klein.

Also in der That nähern wir uns an jeder Stelle einem festen Werth, wenn R *in infinitum* wächst. Folglich existirt ein u, das im Unendlichen gleich Null ist, und an jeder Stelle der Oberflächen S_1, $S_2 \cdots$ einen vorgeschriebenen Werth hat.

Es giebt aber auch nur ein u, welches im Unendlichen verschwindet, während es an den Oberflächen $S_1, S_2 \cdots$ die vorgeschriebenen Werthe $U_1, U_2 \cdots$ annimmt. Gäbe es nämlich zwei, u und u', so müsste doch zwischen diesen ein Unterschied sein: $u - u'$ würde also an einer bestimmten Stelle den Werth δ haben. Weil jedes der beiden u im Unendlichen verschwindet, lässt sich eine Kugeloberfläche von einem so grossen Radius construiren, dass überall auf derselben jedes u beliebig klein, und mithin auch der grösste Unterschied beider beliebig klein, etwa kleiner als δ ist. Nun sind beide u doch so beschaffen, dass sie auf den Flächen $S_1, S_2 \cdots$ dieselben Werthe haben; die Differenz $u - u'$ genügt also der Bedingung, überall an den Flächen $S_1, S_2 \cdots$ gleich Null zu sein: mithin müsste nach dem zweiten Princip $u - u'$ überall innerhalb jener Kugel kleiner als δ sein, was der Annahme widerstreitet.

Es ist nun noch nachzuweisen, dass die Werthe ϱu und $\varrho^2 \frac{du}{d\varrho}$ mit wachsendem ϱ sich einer bestimmten endlichen Grenze nähern. Das u hat also an jeder Stelle einen bestimmten Werth: auf der Hilfskugel mit dem Radius a den Werth μ, im Unendlichen Null. Entwickelt man μ nach Kugelfunctionen: $\mu = \Sigma Y_n$, so ist

$$u = \sum Y_n \left(\frac{a}{\varrho}\right)^{n+1}. \qquad (1)$$

Denn dieser Ausdruck ist erstens überhaupt ein u, weil er stetig ist und der durch Transformation der rechtwinkligen Coordinaten in Polarcoordinaten aus der Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0$$

entstehenden Gleichung

$$\sin\vartheta\varrho\,\frac{d^2(\varrho u)}{d\varrho^2} + \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{du}{d\vartheta}\sin\vartheta\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{d^2u}{d\varphi^2} = 0$$

genügt (§. 18.); zweitens nimmt er auf der Hilfskugel den Werth μ, im Unendlichen den Werth Null an. Aus (1) folgt:

$$u\varrho = a\sum Y_n \left(\frac{a}{\varrho}\right)^n = aY_0 + \frac{a^2}{\varrho}\,Y_1 + \frac{a^3}{\varrho^2}\,Y_2 + \cdots$$

Dass dieser Ausdruck mit wachsendem ϱ nicht wächst, liegt auf der Hand. Ebenso nähert sich

$$\varrho^2 \frac{du}{d\varrho} = -a \sum (n+1) \left(\frac{a}{\varrho}\right)^n Y_n$$

mit wachsendem ϱ einer festen Grenze.

Es giebt also in der That immer eine und nur eine Belegung der Oberflächen beliebig vieler begrenzter Räume mit Masse, bei welcher das Potential der über sämmtliche Oberflächen vertheilten Masse an jeder Stelle einer jeden Oberfläche einen vorgeschriebenen Werth hat.

Dieser Satz ist zuerst von *Gauss* aufgestellt.[30])

§. 36.

Die erste interessante Folgerung aus dem vorhergehenden Satze ist diese:

Hat man eine geschlossene Fläche S und beliebige Massen entweder bloss im Innern oder bloss im Aeussern, so kann man statt dieser Massen eine unendlich dünne Schicht auf jener Fläche substituiren, welche, im ersten Falle, in allen Punkten des äusseren Raumes, im zweiten Falle, in allen Punkten des inneren Raumes ebenso wirkt, wie jene Massen.

I. Das Potential irgend einer bloss im Innern der Fläche S befindlichen Masse M sei v, das Potential irgend einer auf der Fläche S befindlichen Schicht v'. Soll nun die Wirkung der Schicht dieselbe sein wie die der Masse M, so dürfen die Potentialwerthe v und v' nur um eine Constante verschieden sein: $v = v' + \text{Const.}$ Für den Fall, dass die Wirkungen der Masse M und der Schicht in allen Punkten des äusseren Raumes gleich sein sollen, muss die Constante gleich Null sein; denn jedes Potential hat im Unendlichen den Werth Null. Umgekehrt, ist $v = v'$, so sind auch die Wirkungen der Schicht und der Masse M dieselben. Hat nun das gegebene Potential von M auf der Fläche S den Werth V, so bilden wir auf letzterer die Schicht, deren Potential auf der Fläche den Werth V hat (eine solche Schicht existirt immer, aber auch nur eine); dann ist aber auch das Potential dieser Schicht, v', überall im Aeussern

gleich v. Denn es giebt nach dem vorhergehenden Paragraphen nur ein u, welches auf einer geschlossenen Fläche einen vorgeschriebenen Werth V annimmt, und überall im Unendlichen verschwindet; es ist aber sowohl v als auch v' ein solches u.

Es ergiebt sich leicht, dass die Masse der gebildeten Schicht gleich der Masse M sein muss. Denn es ist nach §. 5. $\lim \varrho v = M$, und, wenn wir die Masse der Schicht mit M' bezeichnen, $\lim \varrho v' = M'$; da nun $v = v'$ ist, so muss auch $M = M'$ sein.

Wir haben also den Satz:

Hat man eine beliebig innerhalb eines geschlossenen Raumes vertheilte Masse M, so lässt sich, unbeschadet der Wirkung nach *aussen*, *dieselbe* Masse über die Oberfläche des Raumes, und zwar nur auf eine einzige Art vertheilen; und umgekehrt, jeder auf der Oberfläche befindlichen Schicht, welche dieselbe Wirkung nach aussen ausübt, wie die Masse M, kommt eine Masse zu, welche gleich M ist.

II. Das Potential irgend einer bloss ausserhalb der geschlossenen Fläche S befindlichen Masse sei v, das einer auf der Fläche befindlichen Schicht v'. Soll nun die Wirkung dieser Schicht überall im *Innern* des von S begrenzten Raumes gleich der Wirkung jener Masse sein, so muss wieder $v' = v + \alpha$ sein, wo α eine beliebige Constante bedeutet; aber hier ist kein genügender Grund $\alpha = 0$ zu setzen. Die Gleichung $v' = v + \alpha$ muss auch an der Oberfläche stattfinden, oder es muss $V' = V + \alpha$ sein. Umgekehrt: wenn $V' = V + \alpha$ ist, so findet auch die Gleichung $v' = v + \alpha$ statt. Denn sowohl v als auch v' ist ein u, mithin ist auch die Differenz $v' - v$ ein u. Wenn also $V' - V = \alpha$ ist, so ist $v' - v$ ein u, dessen Werth an der Oberfläche von S constant ist; mithin ist auch $v' - v$ überall im Innern constant, nach dem Satz (§. 34.):

Ein u, welches an der Oberfläche eines zusammenhängenden Raumes einen constanten Werth hat, muss auch überall im Innern denselben constanten Werth haben.

Hieraus folgt, dass die Schicht, deren Potential auf der Fläche S überall den gegebenen Werth $V + \alpha$ hat (und eine

solche Schicht existirt immer, aber auch nur eine), überall im Innern von S dieselbe Wirkung ausübt, wie jene innerhalb des von der Fläche S begrenzten Raumes befindliche Masse.

Um diese Schicht zu bilden, bilden wir erst die Schicht A, welche an der Oberfläche das Potential V hat, und dann eine zweite Schicht B, deren Potential an der Oberfläche überall α ist: addiren wir diese zwei Schichten, so haben wir offenbar diejenige Schicht, deren Potential an der Oberfläche $V + \alpha$ ist. Hieraus ergiebt sich, dass die Masse der statt der gegebenen Masse zu substituirenden Schicht in diesem Fall nicht, wie im ersten Fall, gleich der gegebenen Masse zu sein braucht, sondern dass sie jeden verlangten Werth annehmen kann. Es sei nämlich die völlig bestimmte Masse der Schicht A gleich M. Um die Schicht B zu bilden, suche man vorläufig die Schicht, deren Potential auf der Oberfläche überall 1 ist, und nenne deren gleichfalls völlig bestimmte Masse N; multiplicirt man die Dichtigkeit der letzten Schicht überall mit α, so bekommt man die Schicht B, deren Masse folglich αN sein wird. Demnach wäre $M + \alpha N$ die Masse der Schicht, deren Potential an der Oberfläche $V + \alpha$ ist. Indem wir aber über α willkürlich verfügen können, lässt sich dieser Masse $M + \alpha N$ jeder beliebige Werth ertheilen, wenn nicht etwa die Masse N gleich Null ist. Kann also $N = 0$ sein?

Bezeichnen wir den Potentialwerth der Schicht, deren Masse wir N nannten, mit u, so ist u an der Oberfläche 1, im Unendlichen Null: folglich liegen alle Werthe des u im äussern Raum zwischen 0 und 1 incl.; im Innern hat u überall den Werth 1. Hieraus folgt, dass die Dichtigkeit der Schicht nicht an verschiedenen Stellen verschiedene Zeichen haben kann, sondern positiv ist (stellenweise kann sie auch 0 sein). Denn die Dichtigkeit wird ja bestimmt durch die Gleichung:

$$\left(\frac{du}{dp}\right)_{\alpha+\varepsilon} - \left(\frac{du}{dp}\right)_{\alpha-\varepsilon} = -4\pi k.$$

$\left(\frac{du}{dp}\right)_{\alpha-\varepsilon}$ ist aber Null, da u von der Oberfläche aus ins

Innere hinein seinen Werth nicht ändert; $\left(\frac{du}{dp}\right)_{\alpha+\varepsilon}$ ist negativ oder Null, da u im äusseren Raum von der Oberfläche aus zunächst nicht zunehmen kann. Also an jeder Stelle ist k entweder positiv oder Null; k kann aber auch nicht überall Null sein, denn in diesem Fall würden wir gar keine Schicht mehr haben, das Potential könnte also auch an der Oberfläche nicht 1, sondern nur 0 sein. Also die Gesammtmasse N kann nicht Null sein: sie ist wesentlich positiv.

Wir können nunmehr folgenden Satz aufstellen:

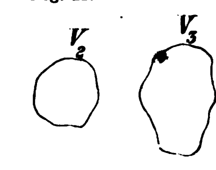
Hat man irgend eine ganz ausserhalb einer geschlossenen Fläche liegende Masse, so lässt sich aus jeder gegebenen Masse auf dieser Fläche eine unendlich dünne Schicht bilden, und zwar allemal nur auf eine einzige Art, welche überall im Innern dieselbe Wirkung wie jene Masse ausübt.

§. 37.

Wir wollen jetzt untersuchen, ob bei einem beliebigen System elektrischer Leiter, welche, abgesehen von dem Einfluss den sie gegenseitig auf einander ausüben, noch dem Einfluss beliebig vieler gegebener elektrischer Nichtleiter ausgesetzt sind, immer elektrisches Gleichgewicht möglich ist. Der Einfachheit wegen nehmen wir eine bestimmte Anzahl von elektrischen Leitern an, etwa drei, indem die folgende Untersuchung sich in gleicher Weise auf eine beliebige Anzahl von elektrischen Leitern ausdehnen lässt.

Jeder der drei Leiter besitzt eine bestimmte Elektricitätsmasse. Das gegebene System der Nichtleiter hat überall ein gegebenes Potential; letzteres habe auf den Oberflächen der Leiter die Werthe V_1, V_2, V_3 (Fig. 22.). Soll elektrisches Gleichgewicht möglich sein, so werden sich an den drei Oberflächen solche Schichten bilden müssen, dass das Gesammtpotential — herrührend von den Schichten und von den Nichtleitern — überall im Innern eines jeden Leiters eine Constante ist. Es genügt aber, dass dasselbe an der Oberfläche eines jeden Leiters constant ist; denn wenn das Potential an der Oberfläche eines zu-

Fig. 22.



sammenhängenden Raumes, in dem sich keine Masse befindet, constant ist, so ist es *eo ipso* im Innern constant (§. 34.). Bezeichnen wir die Werthe des Potentials von allen sich bildenden Schichten, welche an der Oberfläche der drei Leiter stattfinden, mit U_1, U_2, U_3, so sind die Potentialwerthe, die überhaupt daselbst stattfinden, die Summen $V_1 + U_1$, $V_2 + U_2$, $V_3 + U_3$. Jede dieser Summen muss also gleich einer Constanten sein:

$$V_1 + U_1 = \alpha_1\,,\ V_2 + U_2 = \alpha_2\,,\ V_3 + U_3 = \alpha_3.$$

Demnach sind die Oberflächen so mit Schichten zu belegen, dass die Potentialwerthe aller dieser Schichten an den Oberflächen die Werthe

$$U_1 = \alpha_1 - V_1\,,\ U_2 = \alpha_2 - V_2\,,\ U_3 = \alpha_3 - V_3$$

annehmen. V_1, V_2, V_3 sind vollständig gegeben; α_1, α_2, α_3 sind noch zu bestimmen. Durch Superposition können wir die Sache vereinfachen. Wir bestimmen nämlich vorläufig drei solche Schichten, deren Gesammtpotential auf der ersten Oberfläche $-V_1$, auf der zweiten $-V_2$ und auf der dritten $-V_3$ ist. Bildete man dann noch drei neue Schichten so, dass ihr Gesammtpotential auf der ersten Oberfläche α_1, auf der zweiten α_2 und auf der dritten α_3 wäre, so erhielte man durch Addition je zweier Schichten des ersten und zweiten Systems die drei gesuchten Schichten, deren Gesammtpotential auf den einzelnen Oberflächen die Werthe $\alpha_1 - V_1$, $\alpha_2 - V_2$, $\alpha_3 - V_3$ hat. Das zweite Problem, jene drei neuen Schichten zu bilden, kann man wieder durch Superposition in diese drei einfacheren Probleme auflösen: die drei Systeme von Belegungen zu finden, wo auf der

	ersten,	zweiten,	dritten Oberfläche
1) das Potential	1,	0,	0
2) „	0,	1,	0
3) „	0,	0,	1

stattfindet. Das sind drei völlig bestimmte Aufgaben: jeder dieser drei Forderungen lässt sich immer genügen, und zwar nur auf eine Weise. Die Massen, die jeder der drei Schichten zukommen, seien für den ersten Fall m_1, n_1, p_1; für den zweiten Fall m_2, n_2, p_2; für den dritten Fall m_3, n_3, p_3.

Will man dann statt des Potentials 1 im ersten Fall irgend ein anderes constantes Potential α haben, so hat man die drei Massen m_1, n_1, p_1 nur mit α zu multipliciren; dasselbe gilt für den zweiten und dritten Fall. Durch Addition erhält man $m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3$ als völlig bestimmte Masse auf der ersten Oberfläche, wenn die Potentialwerthe resp. $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sein sollen; auf der zweiten Oberfläche $n_1\alpha_1+n_2\alpha_2+n_3\alpha_3$, und auf der dritten $p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3$.

Die drei Massen, die auf den einzelnen Oberflächen erforderlich sind, um die drei Potentiale $-V_1$, $-V_2$, $-V_3$ zu haben, sind gleichfalls völlig bestimmt; sie seien M, N, P. Die Massen, die auf den einzelnen Oberflächen sich befinden, wenn dieselben so belegt sind, dass das Gesammtpotential auf ihnen die Werthe $\alpha_1 - V_1$, $\alpha_2 - V_2$, $\alpha_3 - V_3$ resp. annimmt, sind dann folgende:

auf der ersten Oberfläche $m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 + M$
„ „ zweiten „ $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 + N$
„ „ dritten „ $p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 + P.$

Diese drei Massen müssen aber gleich sein den Massen, die den einzelnen Leitern ursprünglich mitgetheilt waren, da durch die Decomposition des neutralen Gemisches in den einzelnen Leitern immer gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität auf ihren Oberflächen erzeugt werden. Nennen wir daher die den einzelnen Leitern ursprünglich mitgetheilten Massen M', N', P', so haben wir

$$m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3 + M = M'$$
$$n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + n_3\alpha_3 + N = N'$$
$$p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + p_3\alpha_3 + P = P'.$$

Aus diesen drei Gleichungen bestimmen sich die drei α; da letztere linear in den Gleichungen enthalten sind, so lässt sich die Behauptung aufstellen:

Es giebt immer ein und nur ein elektrisches Gleichgewicht.

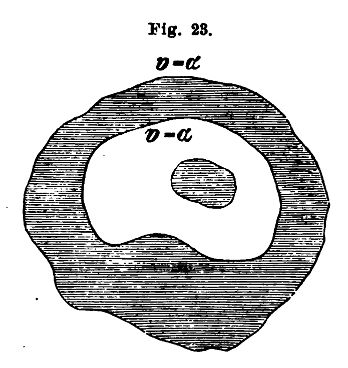
§. 38.

Befand sich ein elektrischer Nichtleiter im Innern einer leitenden elektrischen Hohlkugel (§. 26.), so übten der Nichtleiter und die auf der inneren Oberfläche der Hohlkugel sich

bildende Schicht gar keine Wirkung nach aussen aus, und auf der äusseren Oberfläche bildete sich eine eben solche Schicht, wie sie sich bilden würde, wenn der Nichtleiter und die Höhlung gar nicht vorhanden wären, und die der Hohlkugel mitgetheilte Elektricitätsmasse gleich der Summe aus der in dem Nichtleiter vorhandenen und der der Hohlkugel wirklich mitgetheilten Elektricitätsmasse wäre. Wir werden jetzt zeigen, dass dies Resultat ganz allgemein für jeden hohlen Körper gilt.

Es sei also ein hohler Körper und in dem hohlen Raum ein Nichtleiter gegeben (Fig. 23.). In dem Raum, den der Hohlkörper einnimmt, muss das Gesammtpotential v, welches von den zwei sich bildenden Schichten und von dem Nichtleiter herrührt, constant sein; es genügt aber, dass dasselbe an den zwei Oberflächen des Hohlkörpers constant ist, und zwar an beiden dieselbe Constante. Die Elektricitätsmenge des Nichtleiters sei M, die der Schale A. Wir können den Nichtleiter in anderer Form auftreten lassen; er wirkt über die innere Fläche der Schale hinaus gerade wie eine gewisse Schicht, die sich auf der inneren Fläche bilden lässt (§. 36. I.). Wir substituiren also statt des Nichtleiters an der inneren Oberfläche die Schicht, welche letzteren repräsentirt. Dann wird das v im ganzen Hohlraum constant sein, da sich jetzt in demselben keine Masse mehr befindet (§. 34.). Folglich ist die Dichtigkeit der inneren Schicht, als Differenz der Derivirten nach der Normale, überall gleich 0; diese Schicht besteht aber aus zwei Schichten: aus der sich bildenden und aus der für den Nichtleiter substituirten. Mithin werden diese beiden letzten Schichten überall die entgegengesetzte Dichtigkeit haben, so dass also der Nichtleiter und die innere sich bildende Schicht gar keine Wirkung nach aussen hin ausüben. Ferner besitzt die den Nichtleiter vertretende Schicht dieselbe Masse, die der Nichtleiter besitzt (§. 36. I.),

Fig. 23.



d. i. die Masse M. Die Masse der inneren sich bildenden Schicht ist folglich $-M$; mithin hat die äussere Schicht die Masse $A+M$, da beide zusammen die Masse A besitzen müssen. Da die äussere Schicht ausserdem auf der äusseren Oberfläche ein constantes Potential haben soll, so ist dieselbe gleichfalls völlig bestimmt. Das ganze System, d. h. der Nichtleiter und die an den beiden Oberflächen sich bildenden Schichten, wirkt also nach aussen ebenso, als wenn die Masse des Hohlkörpers $A+M$ wäre, und der Nichtleiter und die Höhlung gar nicht vorhanden wären.

Siebenter Abschnitt.

Magnetismus.

§. 39.

Zur Erklärung der magnetischen Erscheinungen nehmen wir zwei magnetische Fluida an, von denen das eine das positive, das andere das negative heissen möge. Zwei magnetische Massentheilchen stossen sich ab, wenn sie gleichartig sind, und ziehen sich an, wenn sie ungleichartig sind. Die Erfahrung[31]) nöthigt zu der weiteren Annahme, dass in jedem Körper, in welchem sich magnetisches Fluidum befindet, gleiche Quantitäten des positiven und des negativen Fluidums vorhanden sind; dies gilt sogar von den einzelnen beliebig kleinen Theilchen des Körpers, wenn sie nur noch für unsere Sinne wahrnehmbar sind. Die in irgend einem Körper enthaltenen magnetischen Flüssigkeiten können erst dann eine Wirkung ausüben, wenn irgend eine Scheidung derselben eingetreten ist; diese Scheidung kann sich indessen nach dem Obigen offenbar nur auf für uns nicht mehr messbare Entfernungen erstrecken.

Das Magnetisirtsein eines Körpers stellen wir uns als eine Scheidung der in ihm enthaltenen magnetischen Flüssigkeiten vor. Bezeichnen wir das in einem Element eines Magneten enthaltene Quantum freien magnetischen Fluidums mit $d\mu$, so ist das Integral $\int d\mu$, sowohl über den ganzen Magneten als auch über einen beliebig kleinen aber für uns noch messbaren Theil desselben erstreckt, gleich Null.

§. 40.

Man denke sich einen beliebigen Magneten in unendlich kleine Elemente getheilt; a, b, c seien die rechtwinkligen

Coordinaten irgend eines Punktes irgend eines jener Elemente; $d\mu$ die in letzterem enthaltene magnetische Masse; O sei irgend ein Punkt ausserhalb des Magneten, x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten von O, r die Entfernung irgend eines Massenelementes von O. Setzen wir $v = -\int \frac{d\mu}{r}$, ausgedehnt über sämmtliche $d\mu$, dann sind die Derivirten von v nach x, y, z die Componenten der nach den Richtungen der drei Coordinatenaxen zerlegten Kraft, welche der Magnet auf die im Punkte O concentrirte positive Einheit des Magnetismus ausübt. (§. 2. I.)

Wir führen Polarcoordinaten ein, und zwar bezeichnen wir die irgend eines Punktes der Masse, wie früher, mit accentuirten Buchstaben:

$$
\begin{aligned}
a &= \varrho' \cos\vartheta' & x &= \varrho \cos\vartheta \\
b &= \varrho' \sin\vartheta' \cos\varphi' & y &= \varrho \sin\vartheta \cos\varphi \\
c &= \varrho' \sin\vartheta' \sin\varphi' & z &= \varrho \sin\vartheta \sin\varphi.
\end{aligned}
$$

Dann wird:

$$r = \sqrt{(\varrho^2 - 2\varrho\varrho' \cos\omega + \varrho'^2)},$$

$$\cos\omega = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi' - \varphi).$$

Wir entwickeln die Function v, die wieder das Potential des Magneten in Bezug auf den Punkt O heissen möge, nach negativen Potenzen von ϱ, und erhalten:

$$v = -\int \frac{d\mu}{\varrho} \left(1 + \frac{\varrho'}{\varrho} P_1(\cos\omega) + \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2 P_2(\cos\omega) + \cdots\right).$$

Weil eben so viel positiver wie negativer Magnetismus in dem Magneten enthalten ist, so fällt das erste Glied dieser Entwicklung fort, und es bleibt:

$$v = -\frac{1}{\varrho^2} \int d\mu\, \varrho' P_1(\cos\omega) - \frac{1}{\varrho^3} \int d\mu\, \varrho'^2 P_2(\cos\omega) - \cdots$$

Da $P_1(\cos\omega) = \cos\omega$ ist, so haben wir:

$$
\begin{aligned}
v &= -\frac{1}{\varrho^2} \int d\mu\, \varrho' \left(\cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi' - \varphi)\right) - \cdots \\
&= -\frac{1}{\varrho^2} \Big(\cos\vartheta \int \varrho' \cos\vartheta'\, d\mu + \sin\vartheta \cos\varphi \int \varrho' \sin\vartheta' \cos\varphi'\, d\mu \\
&\qquad + \sin\vartheta \sin\varphi \int \varrho' \sin\vartheta' \sin\varphi'\, d\mu\Big) - \cdots \\
&= -\frac{1}{\varrho^2} \left(\cos\vartheta \int a\, d\mu + \sin\vartheta \cos\varphi \int b\, d\mu + \sin\vartheta \sin\varphi \int c\, d\mu\right) - \cdots
\end{aligned}
$$

Die drei Integrale, welche in dem Coefficienten von $\frac{1}{\varrho^2}$ vorkommen,

$$\int a\,d\mu\,,\ \int b\,d\mu\,,\ \int c\,d\mu\,,$$

hängen natürlich von dem Magneten und von der Lage der Axen ab; aber in Folge der Grundhypothese, dass die Summe aller Massentheile Null ist, hängen sie bloss von der *Richtung* der Axen ab, nicht von der Lage des Anfangspunktes: man kann die Axen beliebig verschieben, wenn die neuen Axen nur parallel zu den alten bleiben. Denn dadurch wird nur eine Constante, etwa zu a, addirt: $a' = a +$ Const; die Constante wird mit $\int d\mu$ multiplicirt, der Theil, der zum Integral hinzukommt, ist folglich Null. Wir wollen jene drei Integrale der Kürze halber mit α, β, γ bezeichnen; dann ist

$$v = -\frac{1}{\varrho^2}\left(\alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta \cos\varphi + \gamma \sin\vartheta \sin\varphi\right) - \cdots$$

Während also das Product aus ϱ in das Potential *irgend einer* Masse sich einer Grenze näherte (§. 5.), findet beim magnetischen Potential etwas Aehnliches statt, wenn man dasselbe mit ϱ^2 multiplicirt, so aber, dass die Grenze, welcher sich das Product aus dem magnetischen Potential in ϱ^2 nähert, von der Richtung, in welcher man den Punkt O fortrücken lässt, abhängt; denn es ist

$$\lim\,(-\,\varrho^2 v) = \alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta \cos\varphi + \gamma \sin\vartheta \sin\varphi.$$

Die zweite Seite der vorstehenden Gleichung nennt man das magnetische Moment für die durch die Winkel ϑ, φ bestimmte Richtung.

Wie hängt dies Moment nun von der Richtung ab? Es giebt eine gewisse Richtung, für welche das magnetische Moment eines bestimmten Magneten sein Maximum erreicht; dieses Maximum nennt man das Hauptmoment des Magneten; für alle anderen Richtungen kann das magnetische Moment als Projection des Hauptmomentes auf die jedesmalige Richtung angesehen werden. Hiervon überzeugt man sich leicht durch die folgende Betrachtung. Die drei Factoren von α, β, γ sind die Cosinus der drei Winkel, die die Richtung,

in welcher man ϱ wachsen lässt, mit den drei Coordinatenaxen macht; nennen wir diese Winkel λ, μ, ν, und das magnetische Moment für diese Richtung K, so ist

$$K = \alpha \cos \lambda + \beta \cos \mu + \gamma \cos \nu.$$

Nun lassen sich α, β, γ ausdrücken als Producte einer positiven Grösse in den Cosinus je eines Winkels. Setzen wir nämlich

$$\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)} = k,$$

so lassen sich drei Winkel l, m, n so bestimmen, dass

$$\alpha = k \cos l, \; \beta = k \cos m, \; \gamma = k \cos n \tag{1}$$

wird, und es ist

$$K = k (\cos l \cos \lambda + \cos m \cos \mu + \cos n \cos \nu).$$

Der Coefficient von k ist der Cosinus des Winkels, den die beiden Richtungen mit einander bilden, die durch die Winkel λ, μ, ν, und l, m, n resp. bestimmt sind. Jede Linie, welche mit den Coordinatenaxen die durch (1) bestimmten Winkel l, m, n bildet, nennen wir die magnetische Axe des Magneten. Letztere bleibt insofern unbestimmt, als sie durch jeden beliebigen Punkt gehen kann; sie ist nur der Richtung nach bestimmt. Nennen wir den Winkel, den die Richtung der magnetischen Axe mit der Richtung bildet, in welcher wir den Punkt O fortrücken lassen, χ, so ist

$$K = k \cos \chi.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich die über das magnetische Moment aufgestellten Behauptungen; auch sieht man aus derselben, dass das Maximum des magnetischen Momentes für diejenige Richtung stattfindet, welche mit der Richtung der magnetischen Axe zusammenfällt, und dass dies Maximum oder das Hauptmoment

$$k = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}$$

ist.[32])

§. 41.

Aus der Gleichung

$$v = -\frac{1}{\varrho^2} k \cos \chi - \cdots$$

folgt, dass alle Magnete in Bezug auf ihre Wirkung *in die*

Ferne mit einander vergleichbar sind. Denn wenn die magnetischen Axen zweier Magnete parallel sind, so ist es nur eine Constante, das Hauptmoment, welches den einen von dem andern unterscheidet. Bezeichnen wir das Potential und das Hauptmoment für zwei Magnete, deren Axen parallel sind, resp. durch v, k und v', k', so ist

$$v = -\frac{1}{\varrho^2} k \cos\chi - \cdots$$

$$v' = -\frac{1}{\varrho^2} k' \cos\chi - \cdots$$

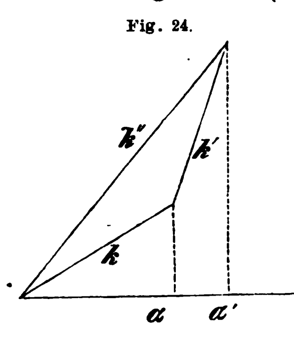
Hieraus folgt:

Wenn die Axen zweier Magnete parallel gestellt sind, so verhalten sich ihre Wirkungen in die Ferne wie ihre Hauptmomente.

Wie verhält sich das Hauptmoment des aus zwei neben einander befindlichen Magneten zusammengesetzten Magneten zu den Hauptmomenten der einzelnen Magnete?

Um den ersten Magneten zu repräsentiren, ziehen wir eine beliebige Linie (Fig. 24.), welche die magnetische Axe desselben darstellen soll, und geben jener Linie eine bestimmte Länge k, die das Hauptmoment darstellen soll. Für den zweiten Magneten ziehen wir von einem der beiden Endpunkte jener Linie die zur Axe desselben parallele Linie, und geben ihr die Länge k', welche sich zu k verhält, wie das Hauptmoment des zweiten Magneten zu dem des ersten.

Fig. 24.



Die Richtung der Verbindungslinie der nicht an einander stossenden Endpunkte der Linien k und k' giebt die Richtung der Axe des zusammengesetzten Magneten an, und sein Hauptmoment ist durch die Länge k'' der Verbindungslinie repräsentirt. Denn zieht man durch den Endpunkt der Linie k, welchen letztere nicht mit k' gemeinsam hat, drei auf einander senkrechte Linien, welche mit der Linie k die Winkel l, m, n bilden mögen, und projicirt k auf dieselben, so sind die drei Projectionen

$$k \cos l = \alpha,\ k \cos m = \beta,\ k \cos n = \gamma$$

die Momente des ersten Magneten für die Richtungen jener drei Linien; ebenso sind die Projectionen von k'

$$k' \cos l' = \alpha',\ k' \cos m' = \beta',\ k' \cos n' = \gamma'$$

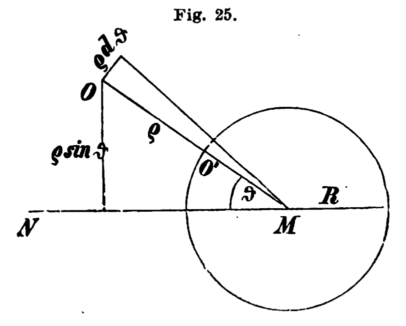
die Momente des zweiten Magneten für dieselben drei Richtungen. Für den zusammengesetzten Magneten ist nun $\alpha + \alpha'$ das Moment für die erste, $\beta + \beta'$ für die zweite, $\gamma + \gamma'$ für die dritte Richtung; denn das Moment eines zusammengesetzten Magneten für irgend eine Richtung ist offenbar die Summe der Momente der beiden ihn zusammensetzenden Magnete für dieselbe Richtung. Die Verbindungslinie k'' projicirt sich aber in den drei Linien $\alpha + \alpha'$, $\beta + \beta'$, $\gamma + \gamma'$. Wir finden also in der That durch die angegebene Construction Axe und Hauptmoment des zusammengesetzten Magneten. Für die Zusammensetzung zweier Magnete dient demnach dieselbe Construction, welche der Satz vom Parallelogramm der Kräfte für die Zusammensetzung zweier Kräfte vorschreibt.

§. 42.

Zum Schluss wollen wir die Potentialtheorie auf den Erdmagnetismus anwenden.

Wir führen Polarcoordinaten ein. Als festen Punkt nehmen wir den Erdmittelpunkt M (Fig. 25.); die feste Linie sei die von M nach dem Nordpol gezogene Gerade MN; als feste Ebene nehmen wir die Ebene des ersten Meridians. Demnach ist, wenn wir die Polarcoordinaten irgend eines Punktes O wieder ϱ, ϑ, φ nennen, ϱ seine Entfernung vom Mittelpunkt der Erde; ϑ das

Fig. 25.



Complement der Breite desjenigen Punktes O' der Erdoberfläche, in welchem ϱ letztere trifft; φ seine geographische Länge, die wir vom ersten Meridian östlich zählen wollen. Die in dem Punkte O stattfindende erdmagnetische Kraft zer-

legen wir in drei Componenten, deren jede auf der Ebene der beiden anderen senkrecht steht; und zwar soll die eine Componente, die wir Z nennen wollen, vertical gerichtet sein, die zweite, Y, soll parallel mit dem durch O' gelegten Parallelkreis, die dritte, X, parallel mit dem durch O' gelegten Erdmeridian sein. Positiv wollen wir die Componente Z nennen, wenn sie nach unten, dem Erdmittelpunkt zu, gerichtet ist, die Componente Y, wenn sie nach Westen, die Componente X, wenn sie nach Norden gerichtet ist.

Das magnetische Potential v in dem Punkt O wird eine Function von ϱ, ϑ, φ sein; aus demselben kann man die Componente der Kraft für irgend eine Richtung ableiten, indem z. B. die parallel der X-Axe gerichtete Componente durch die Gleichung

$$X = \frac{dv}{dx}$$

bestimmt sein würde. Der in dieser Gleichung enthaltene Satz lässt sich so ausdrücken:

Soll die Componente der Kraft für irgend eine Richtung angegeben werden, so verschiebe man den Punkt O, auf den die Masse wirkt, in dieser Richtung um ein unendlich kleines Stück, und dividire die daraus hervorgehende Veränderung des Potentials durch den von dem Punkt O zurückgelegten unendlich kleinen Weg.

Wollen wir z. B. die Componente Y in der Richtung des Parallelkreises haben, so verschieben wir den Punkt O in der mit derselben parallelen Richtung: der von dem Punkt O zurückgelegte Weg ist $\varrho \sin \vartheta \, d\varphi$. Bei dieser Verschiebung ändert sich nur φ um $d\varphi$, ϱ und ϑ bleiben dieselben; die Aenderung des v ist folglich $\frac{dv}{d\varphi} d\varphi$, und mithin

$$Y = \frac{\frac{dv}{d\varphi} d\varphi}{\varrho \sin \vartheta \, d\varphi} = \frac{1}{\varrho \sin \vartheta} \frac{dv}{d\varphi}.$$

Dies wäre die Componente in der nach Osten genommenen Richtung; da wir sie aber für die Richtung nach Westen angeben wollen, haben wir den vorstehenden Ausdruck mit

dem Minuszeichen zu versehen. Durch ähnliche Betrachtungen findet man die für X und Z gültigen Ausdrücke. Es wird:

$$X = -\frac{1}{\varrho}\frac{dv}{d\vartheta}, \quad Y = -\frac{1}{\varrho \sin\vartheta}\frac{dv}{d\varphi}, \quad Z = -\frac{dv}{d\varrho}.$$

§. 43.

Wir wollen den Werth des Potentials an der Erdoberfläche durch V bezeichnen; derselbe wird eine blosse Function von ϑ und φ sein. An der Erdoberfläche ist

$$X = -\frac{1}{R}\frac{dV}{d\vartheta}$$

$$Y = -\frac{1}{R \sin\vartheta}\frac{dV}{d\varphi}. \tag{1}$$

Integrirt man die Gleichung $\frac{dV}{d\vartheta} = -RX$ von $\vartheta = 0$, d. h. vom Pol an, so entsteht

$$\frac{V - V_0}{R} = -\int_0^\vartheta X d\vartheta, \tag{2}$$

wo V_0 eine blosse Constante ist, nämlich der Potentialwerth am Pol. Aus (1) und (2) folgt

$$Y = \frac{1}{\sin\vartheta}\int_0^\vartheta \frac{dX}{d\varphi}\, d\vartheta.$$

Hieraus ergiebt sich der merkwürdige Satz, dass die nach Westen gerichtete Componente für jeden Punkt der Erdoberfläche vollständig bestimmt ist, wenn die nach Norden gerichtete Componente für die ganze Erdoberfläche gegeben wäre.[33]) Die Frage, wo der Sitz der erdmagnetischen Kräfte ist, kommt dabei gar nicht in Betracht.

§. 44.

Wollen wir auch die verticale Componente aus der nach Norden gerichteten Componente bestimmen, so müssen wir uns durchaus darüber entscheiden, wo der Magnetismus sitzen soll.

Wäre die Componente X, also auch jenes Integral $-\int_0^\vartheta X d\vartheta$ für alle Punkte der Erdoberfläche bestimmt, so könnte man

letzteres, als Function von ϑ und φ, die für alle Werthe von ϑ und φ von 0 bis π und von 0 bis 2π resp. gegeben ist, und die wir Kürze halber durch $f(\vartheta, \varphi)$ bezeichnen wollen, nach Kugelfunctionen entwickeln. Setzen wir nämlich

$$-\int_0^\vartheta X d\vartheta = f(\vartheta, \varphi) = U_0 + T_1 + T_2 + \cdots,$$

wo U_0, T_1, $T_2 \cdots$ Kugelfunctionen nullter, erster, zweiter $\cdots$ Ordnung sind, so ist

$$U_0 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi f(\vartheta', \varphi') \sin\vartheta' d\vartheta'$$

$$T_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi f(\vartheta', \varphi') P_n(\cos\omega) \sin\vartheta' d\vartheta'.$$

U_0, T_1, $T_2 \cdots$ sind also sämmtlich als gegeben anzusehen. Nach §. 43. (2) hätten wir dann, wenn wir $\frac{V_0}{R} + U_0 = T_0$ setzen:

$$\frac{V}{R} = T_0 + T_1 + T_2 + \cdots, \tag{1}$$

wo alle Glieder der zweiten Seite bis auf T_0 bestimmt wären. Lässt sich, wenn das Potential an der Oberfläche gegeben ist, daraus das Potential ausserhalb derselben ableiten? Nur, wenn wir uns entscheiden, wo die Kraft sitzt, und diese Entscheidung entweder dahin ausfällt, dass die Kraft ausschliesslich in der Erde, oder dahin, dass sie ausschliesslich ausserhalb derselben ihren Sitz hat.

Erste Hypothese:

Der Magnetismus sitzt ausschliesslich im Innern der Erde.

In diesem Fall ist es leicht, das Potential v auch ausserhalb der Erde zu bestimmen. Denn es lässt sich v jetzt für alle *ausserhalb* der Erde gelegenen Punkte nach negativen Potenzen von ϱ entwickeln:

$$v = \sum \frac{U_n}{\varrho^{n+1}}, \tag{2}$$

wo U_n eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung ist (§. 19.). Für die Oberfläche würde aus (2) folgen

$$\frac{V}{R} = \frac{U_0}{R^2} + \frac{U_1}{R^3} + \cdots.$$

Vergleicht man dies mit (1) und beachtet, dass eine Function sich nur auf eine Art in eine Reihe von Kugelfunctionen entwickeln lässt, so ergiebt sich

$$U_0 = R^2 T_0, \quad U_1 = R^3 T_1 \text{ u. s. f.}$$

Mithin ist nach (2)

$$\frac{v}{R} = T_0 \frac{R}{\varrho} + T_1 \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 + \cdots. \tag{3}$$

Hieraus ergiebt sich für die verticale Componente Z in irgend einem Punkt ausserhalb der Erde der Werth:

$$Z = -\frac{dv}{d\varrho} = T_0 \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 + 2\,T_1 \left(\frac{R}{\varrho}\right)^3 + 3\,T_2 \left(\frac{R}{\varrho}\right)^4 + \cdots,$$

und da letztere Gleichung in Folge der Stetigkeit von Z auch an der Erdoberfläche gilt, so hat Z daselbst den Werth:[34])

$$Z = T_0 + 2\,T_1 + 3\,T_2 + \cdots.$$

T_0 wäre Null, wenn auch in der Erde ebenso viel positiver wie negativer Magnetismus wäre; denn es ist immer lim $(v\varrho)$ gleich der wirkenden Masse (§. 5.); aus (3) ergiebt sich aber lim $(v\varrho) = R^2 T_0$.

Zweite Hypothese:

Der Sitz des Magnetismus ist ausserhalb der Erde.

In diesem Fall lässt sich v für alle Punkte *innerhalb* der Erde nach positiven Potenzen von ϱ entwickeln:

$$v = \Sigma\, U_n \varrho^n, \tag{4}$$

wo wieder U_n eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung ist (§. 19.). An der Oberfläche geht die Gleichung (4) über in

$$\frac{V}{R} = \frac{U_0}{R} + U_1 + U_2 R + U_3 R^2 + \cdots.$$

Vergleicht man diese Entwicklung wieder mit (1), so folgt

$$U_0 = R\,T_0, \; U_1 = T_1, \; U_2 = \frac{T_2}{R}, \; U_3 = \frac{T_3}{R^2} \cdots,$$

mithin ist

$$\frac{v}{R} = T_0 + T_1 \frac{\varrho}{R} + T_2 \left(\frac{\varrho}{R}\right)^2 + \cdots,$$

und folglich wäre jetzt:

$$Z = -T_1 - 2T_2\frac{\varrho}{R} - 3T_3\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2 - \cdots,$$

und an der Oberfläche[35])

$$Z = -T_1 - 2T_2 - 3T_3 - \cdots$$

§. 45.

Wir stellen nun noch die Hypothese auf, dass die Ursache des Erdmagnetismus theils im Innern der Erde, theils ausserhalb derselben befindlich sei. In diesem Fall lässt sich allerdings aus der blossen Kenntniss der nach Norden gerichteten Componente die verticale Componente nicht mehr entwickeln, indem die zwei Theile des Potentials, die von dem innerhalb der Erde und von dem ausserhalb derselben befindlichen Magnetismus herrühren, aus jener Kenntniss allein sich nicht trennen lassen. Kennt man aber für alle Punkte der Erdoberfläche sowohl die nach Norden gerichtete als auch die verticale Componente, so lässt sich jene Trennung bewerkstelligen, und somit feststellen, der wievielste Theil einer jeden der drei Componenten in irgend einem Punkt der Erdoberfläche der einen und der anderen Ursache zuzuschreiben ist.

Es sei nämlich V das Gesammtpotential auf der Erdoberfläche; ferner seien V' und V'' die beiden Theile desselben, welche von dem im Innern und Aeussern resp. enthaltenen Magnetismus herrühren. Setzen wir nun

$$\frac{V}{R} = T_0 + T_1 + T_2 + \cdots, \tag{1}$$

wo T_0, T_1, $T_2 \cdots$ wieder Kugelfunctionen von der Ordnung 0, 1, 2 ⋯ sind, so lassen sich die Grössen T_1, $T_2 \cdots$ aus der blossen Kenntniss der nach Norden gerichteten Componente bestimmen; nur T_0 bleibt unbestimmt. Setzen wir ferner

$$\frac{V'}{R} = T_0' + T_1' + T_2' + \cdots$$

$$\frac{V''}{R} = T_0'' + T_1'' + T_2'' + \cdots,$$

so ist

$$\frac{V}{R} = \frac{V' + V''}{R} = (T_0' + T_0'') + (T_1' + T_1'') + (T_2' + T_2'') + \cdots \tag{2}$$

Die beiden Summanden eines jeden Gliedes dieser Summe, z. B. des Gliedes $T_1' + T_1''$ sind Kugelfunctionen derselben Ordnung. Während $T_1, T_2 \cdots$ als bekannt anzusehen sind, werden sämmtliche T' und T'', vorläufig wenigstens, als unbekannt zu betrachten sein.

Bezeichnen wir die beiden Bestandtheile der verticalen Componente Z, welche von dem im Innern und Aeussern enthaltenen Magnetismus herrühren, durch Z' und Z'', so haben wir nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$Z' = T_0' + 2T_1' + 3T_2' + \cdots$$
$$Z'' = - T_1'' - 2T_2'' - 3T_3'' - \cdots.$$

Mithin ist die ganze verticale Componente

$$Z = Z' + Z'' = T_0' + (2T_1' - T_1'') + (3T_2' - 2T_2'') + \cdots \quad (3)$$

Die einzelnen Glieder einer jeden Differenz, wie $2T_1' - T_1''$, sind wieder Kugelfunctionen derselben Ordnung. Wenn man nun auch noch die verticale Componente für jeden Ort der Erde bestimmt hätte, so könnte man daraus eine Entwicklung dieser Componente nach Kugelfunctionen ableiten; dieselbe sei

$$Z = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots, \quad (4)$$

wo $U_0, U_1, U_2 \cdots$ wieder als bekannt anzusehen sind.

Aus der Vergleichung von (1) und (2), sowie von (3) und (4) ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} T_0' + T_0'' &= T_0 & \qquad T_0' &= U_0 \\ T_1' + T_1'' &= T_1 & \qquad 2T_1' - T_1'' &= U_1 \\ T_2' + T_2'' &= T_2 & \qquad 3T_2' - 2T_2'' &= U_2 \\ \cdots & & \cdots & \end{aligned}$$

Hieraus lassen sich alle T' und T'' bestimmen; nur T_0'' bleibt unbestimmt.

Anmerkungen.

[1]) Mémoires de Mathématique et de Physique, tirés des régistres de l'Académie royale des sciences. Année 1782: Théorie des attractions des sphéroides et de la figure des planètes, par M. de la Place.

[2]) Dieser Satz ist von *G. Green* für die Potentialtheorie aufgestellt und bewiesen. *Crelle*'s Journal B. 44: An Essay on the Application of mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism. Art. 3.

[3]) Diese Angabe *Dirichlet's* ist nicht ganz genau: *Newton* hat die Anziehung bestimmt für den Fall, dass der Punkt auf der Verlängerung oder am Ende der Umdrehungsaxe liegt (im ersten Buch seiner Principia philosophiae naturalis, Sectio XIII); ausserdem hat er (im dritten Buch der Principien, propositio 19) ein *angenähertes* Verhältniss der Anziehung am Pol der *Erde*, also eines von der Kugel *nur wenig* abweichenden Ellipsoides, zur Anziehung am Aequator gefunden.

[4]) *Mac Laurin* hat seine Untersuchungen hierüber zuerst mitgetheilt in seiner von der Pariser Akademie gekrönten Preisschrift: De caussa physica fluxus et refluxus maris, 1740. Dieselbe befindet sich abgedruckt im Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'acad. roi. des sc. Tom. IV., und in der von *le Seur* und *Jacquiers* besorgten Ausgabe von *Newton's* Principien. Uebrigens findet man das in der genannten Abhandlung über das Attractionsproblem Enthaltene auch in *Mac Laurin*'s Treatise of fluxions T. I. Chap. 14.

[5]) Treatise of fluxions a. a. O.

[6]) Nouveaux Mémoires de l'Académie royale à Berlin. Année 1773.

[7]) Opuscules mathématiques par d'Alembert. Tome VI. 1773. Sur la figure de la terre, art. 73—77.

[8]) Recherches sur l'attraction des Sphéroides homogènes. Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie par divers savans. Paris 1785.

[9]) *Mac Laurin* hat folgenden Satz aufgestellt und *bewiesen*: Die Kräfte, mit denen zwei confocale ungleichaxige Ellipsoide denselben auf *einer ihrer Axen* liegenden äusseren Punkt anziehen, sind ihren Massen proportional (Treatise of fluxions Art. 653). Dass der Satz allgemein gültig sei für jede Lage des angezogenen Punktes, ahnte *Mac Laurin* noch nicht, wie aus Art. 654 deutlich hervorgeht. Vgl. meine Notiz hierüber in *Schlömilch*'s Zeitschrift, 14. Jahrgang S. 265.

[10]) Histoire de l'Académie des Sciences de Paris 1782.

[11]) Hist. de l'Ac. des Sc. de Paris 1788. Für Rotationsellipsoide

hat *Legendre* den Satz schon in seiner unter 8) citirten Abhandlung bewiesen.

[12]) Ganz denselben Ausdruck hat *Poisson* gefunden (Mémoire sur l'attraction d'un ellipsoïde homogène in den Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut T. XIII. année 1835, pag. 540), und *Chasles* (Mémoire sur l'attr. des ellipsoïdes in den Comptes rendus des séances de l'Académie T. VI. année 1838, und im Journal de mathématiques de Liouville, T. V. année 1840). *Dirichlet's* Aeusserung, es sei Niemandem eingefallen, die Wirkung einer ellipsoidischen Schicht nach aussen zu untersuchen, ist daher sehr befremdend.

[13]) *Poisson* findet (a. a. O.), dass die Richtung der Kraft zusammenfällt mit der Axe des Kegels, dessen Spitze der angezogene Punkt ist, und welcher der Schale umschrieben ist. *Chasles* zeigt (a. a. O.), dass die Axe dieses Kegels mit der im angezogenen Punkt auf dem confocalen Ellipsoid errichteten Normale zusammenfällt.

[14]) Diese Darstellung beruht auf einem Irrthum. Die Sache verhält sich so: *Poisson* sagt in seiner berühmten Abhandlung über die Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche leitender Körper (Mémoires de l'Institut T. XII. année 1811), er habe auf analytischem Wege gefunden, dass auf der Oberfläche eines nahezu kugelförmigen Körpers die Anziehungskraft einer darauf verbreiteten Elektricitätsmenge deren Dicke proportional sei, ebenso wie auf der Oberfläche eines Rotationsellipsoides, welches auch das Verhältniss seiner Axen sei. Es liege der Gedanke nahe, dass dies ein allgemeines Resultat sei; aber, obgleich dieser Satz sehr einfach sei, so würde es doch sehr schwer sein, ihn mit Hilfe der Formeln für die Anziehung zu beweisen. Hier liege einer der Fälle vor, wo man der Unvollkommenheit der Analysis durch directe Betrachtungen zu Hilfe kommen müsse. *Laplace* habe ihm einen rein synthetischen Beweis des Satzes mitgetheilt, dass auf der Oberfläche eines jeden elektrischen Körpers die Kraft des elektrischen Fluidums der Dicke proportional sei; an einer späteren Stelle werde er diesen Beweis mittheilen. Später sagt *Poisson*, dieser Satz sei in einem anderen allgemeineren enthalten, den er beweisen wolle. Nachdem er den Beweis gegeben, fügt er bei, dies sei der anfangs angekündigte, von *Laplace* ihm mitgetheilte Beweis; er habe ihn etwas verallgemeinert, indem er anfangs eine Massenschicht betrachtet habe, die nicht, wie die elektrische Schicht, der Bedingung unterliege, keine Wirkung auf die Punkte ihrer inneren Oberfläche auszuüben. Die betreffenden Stellen lauten wörtlich:

Pag. 5. En faisant usage de ces formules j'ai trouvé qu'à la surface d'un sphéroïde peu différent d'une sphère, la force répulsive du fluide électrique est proportionelle à son épaisseur en chaque point; il en est de même à la surface d'un ellipsoïde de révolution, quelque soit le rapport de ses deux axes ..... Il est naturel de penser que ce resultat est général et qu'il a également lieu à la surface d'un corps

conducteur quelconque; mais quoique cette proposition paraisse très-simple, il serait cependant très-difficile de la démontrer au moyen des formules de l'attraction des sphéroïdes; et c'est un de ces cas où l'on doit suppléer à l'imperfection de l'analyse par quelque considération directe. On trouvera dans la suite de ce Mémoire, une démonstration purement synthétique, que M *Laplace* a bien voulu me communiquer, et qui prouve qu'à la surface de tous les corps électrisés, la force répulsive du fluide est partout proportionelle à son épaisseur.

Pag. 30. On démontre aussi, sans aucun calcul, que la répulsion électrique à la surface d'un corps quelconque est proportionelle à l'épaisseur ou à la quantité d'électricité, accumulée en chaque point; mais cette proposition est comprise dans une autre plus générale, dont je vais donner la démonstration.

Je considère une couche infinement mince, solide ou fluide, et de telle forme qu'on voudra; je suppose que l'on prenne un point A sur la surface extérieure, et qu'on y élève une normale à cette surface, qui aille couper la surface intérieure en un point que j'appelle a, je désigne par y l'épaisseur Aa de la couche, par R son action sur le point A, décomposée suivant la normale Aa, et par R' son action sur le point a, décomposée suivant la même droite; je dis qu'on aura toujours

$$R - R' = 4\pi y.$$

Es folgt der Beweis. Darauf fährt *Poisson* fort:

Cette démonstration est celle que nous avons annoncée au commencement de ce Mémoire, et qui nous a été communiquée par M. *Laplacé*. Nous l'avons rendue un peu plus générale, en considérant d'abord une couche fluide ou solide qui n'était pas assujétie à n'exercer aucune action sur les points de la surface intérieure.

Hiernach ist also der von *Dirichlet Coulomb* als ein Resultat der Beobachtung zugeschriebene Satz zuerst von *Poisson* aufgestellt als Ergebniss. theoretischer Betrachtungen, und von *Laplace* zuerst bewiesen (ob auch *Laplace* diesen Satz selbständig gefunden, geht aus *Poisson's* Bericht nicht klar hervor); der allgemeinere Satz, der ersteren als speciellen Fall umfasst, der nach *Dirichlet* von *Laplace* herrühren soll, ist von *Poisson* aufgestellt und auch — indem er den von *Laplace* ihm mitgetheilten Beweis des ersten Satzes etwas verallgemeinerte — bewiesen.

Ich theile noch den von *Poisson* verallgemeinerten *Laplace*'schen Beweis mit.

Pag. 31. . . . . . je dis qu'on aura toujours

$$R - R' = 4\pi y.$$

Pour le prouver, menons par le point intérieur a un plan perpendiculaire à Aa; ce plan partagera la couche que nous considérons, en deux segmens; celui qui répond à la flèche Aa sera infiniment petit par rapport à l'autre; mes les actions des deux segmens sur le point

A, ou sur le point a, n'en seront pas moins comparables et du même ordre. Appellons S l'action que le grand segment exerce sur le point a, suivant la normale Aa; soit aussi s l'action du petit segment sur le même point, et décomposée suivant la même droite; pour fixer les idées, supposons que ces actions proviennent des attractions de tous les points de la couche sur le point a, de sorte que ce point soit tiré de dehors en dedans, par l'excès de la force S sur la force s, et qu'on ait par conséquent $R' = S - s$. En négligeant les quantités du second ordre par rapport à l'épaisseur de la couche, l'attraction du grand segment est evidemment la même sur les deux points A et a; avec un peu d'attention, on s'assura de même que l'attraction du petit segment sur le point A, ne peut différer de celle qu'il exerce sur le point a, que d'une quantité infinement petite par rapport à cette force; il s'ensuit donc que le point A est tiré de dehors en dedans suivant la normale Aa, par la somme des deux mêmes forces S et s, qui agissent en sens contraire l'une de l'autre sur le point a; par conséquent on a $R = S + s$, et en retranchant la valeur précédente de R', il vient $R - R' = 2s$.

Il reste maintenant à déterminer la valeur de s. Or, si nous prenons au-delà du point a, sur le prolongement de la normale Aa, un point quelconque C, et que de ce point, comme centre, nous décrivions deux surfaces sphériques passant par les points A et a; nous formerons une couche sphérique d'une épaisseur constante et égale à y; son attraction sur le point intérieur a sera nulle; sur le point extérieur A, elle sera la même que si la couche entière était réunie à son centre C, ou, autrement dit, elle sera exprimée par $4\pi y$; relative à cette couche, on aura donc $R' = 0$, $R = 4\pi y$, et l'équation générale $R - R' = 2s$ deviendra $4\pi y = 2s'$, ou $2\pi y = s'$, en représentant par s' l'attraction exercée sur le point A par le segment sphérique qui répond à la flèche Aa. Menons par la droite AC une suite de plans qui partage ce segment en une infinité de parties, soit α l'angle compris entre deux de ces plans: l'attraction normale de la partie correspondante à cet àngle sera à l'attraction s' du segment entier, comme α est à 2π; elle sera donc égale à αy; et comme elle se trouve indépendante du rayon AC, il en résulte que l'attraction s' du segment sphérique ne diffère pas de l'attraction s du segment quelconque que nous avions d'abord considéré. En effet, en faisant varier les rayons des différentes parties du segment sphérique, on fera coïncider chacune d'elles avec la partie correspondante de l'autre segment, et leur somme exprimera l'attraction de ce segment; mais les attractions partielles étant indépendantes de ces changemens de rayon, leur somme restera toujours égale à s'; par conséquent on aura $s = s' = 2\pi y$.

Substituant cette valeur dans l'équation précédemment trouvée, il vient $R - R' = 4\pi y$; ce qu'il fallait démontrer.

De même, si l'on appelle T l'action de la couche entière sur le

point A, décomposée suivant le plan tangent, ou perpendiculaire à Aa et que l'on désigne par T' son action sur le point a, aussi perpendiculaire à cette droite, on trouvera $T = T'$, en observant que dans cette direction l'action du petit segment peut être supposée nulle.

. . . .

S'il s'agit d'une couche fluide répandue sur un sphéroïde de forme quelconque, et disposée de manière qu'elle n'exerce aucune action sur les points intérieurs, ce qui est le cas du fluide électrique, on aura $T' = 0$, $R' = 0$; donc aussi $T = 0$, $R = 4\pi y$; d'où il suit 1° que la force tangentielle est nulle à la surface extérieure; 2° que la force normale à cette surface est proportionelle à l'épaisseur de la couche en chaque point.

[15]) Für die ellipsoidische Schale z. B. ist, wenn ε die Dicke am Ende der Halbaxe α bezeichnet, nach §. 11.

$$\chi = \frac{1}{\alpha\sqrt{\left(\frac{x^2}{\alpha^4} + \frac{y^2}{\beta^4} + \frac{z^2}{\gamma^4}\right)}}.$$

[16]) §. 14. enthält den Beweis dieses Satzes.

[17]) Es wird gut sein, dies allgemein gültige Resultat an dem einfachen Fall, dass die mit Masse belegte Fläche eine Kugelfläche, und die Masse von constanter Dichtigkeit ist, zu prüfen. Bezeichnen wir die constante Dichtigkeit der auf der Kugelfläche befindlichen Masse durch k, den Radius der Kugelfläche durch α, so erhält man leicht mit Hilfe der in §. 5. für den Fall einer homogenen Vollkugel entwickelten Potentialausdrücke folgende Ausdrücke für das Potential v jener Masse. Liegt der Punkt O im Innern, so wird $v = 4\pi k\alpha = \text{Const}$, und liegt er im Aeussern, so wird $v = \frac{4\pi k\alpha^2}{\alpha \pm x}$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem der Abstand x des Punktes O von der Kugelfläche als positiv oder negativ betrachtet wird. Hieraus erhält man zunächst, für innere Punkte:

$$\frac{dv}{dx} = 0, \tag{1}$$

nnd für äussere Punkte

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{4\pi k\alpha^2}{(\alpha+x)^2}, \text{ wenn } x \text{ als positiv betrachtet wird} \tag{2}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{4\pi k\alpha^2}{(a-x)^2}, \quad \text{„ „ „ negativ „ „ .} \tag{3}$$

Sehen wir die ausserhalb der Fläche fallenden x als positiv an, so ist nach (2) $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{+\varepsilon} = -4\pi k$, und nach (1) $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{-\varepsilon} = 0$; sehen wir hingegen die innerhalb der Fläche liegenden x als positiv an, so ist nach

(1) $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{+\varepsilon} = 0$, und nach (3) $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{-\varepsilon} = 4\pi k$. Folglich ist in beiden Fällen $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{+\varepsilon} - \left(\frac{dv}{dx}\right)_{-\varepsilon} = -4\pi k$.

[18]) Diesen und andere Ausdrücke für P_n hat *Dirichlet* angegeben in *Crelle*'s Journal B. 17. S. 39.

[19]) Dies ergiebt sich leicht aus dem bekannten Convergenzsatz:

Aus der Convergenz der aus lauter positiven Gliedern bestehenden Reihe $t_0 + t_1 + t_2 + \cdots$ folgt die Convergenz der gleichfalls aus lauter positiven Gliedern bestehenden Reihe $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$, sobald der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ von irgend einer bestimmten Stelle an kleiner bleibt als der entsprechende Quotient $\frac{t_{n+1}}{t_n}$.

Die Glieder der Reihe für v werden allerdings theils positiv, theils negativ sein; allein dieselbe würde offenbar auch convergiren, wenn alle ihre Glieder positiv wären. Die Reihen

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$
$$a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

mögen durch A und B resp. bezeichnet werden. Aus der Convergenz der Reihe A, wenn sie aus lauter positiven Gliedern bestände, folgt zunächst, mit Hilfe des angeführten Satzes, die Convergenz der Reihe B, wenn wir auch da sämmtliche Glieder als positiv betrachten; dieselbe wird also um so mehr convergiren, wenn ihre Glieder theils positiv, theils negativ sind.

[20]) *Crelle*'s Journal B. 1. S. 314.

[21]) *Dirichlet*: Sur les séries dont le terme général dépend des deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données. *Crelle*'s Journal, B. 17. Der in dieser Abhandlung enthaltene Beweis *Dirichlet*'s soll hier im engsten Anschluss an das Original mitgetheilt werden.

Zunächst müssen wir P_n durch ein bestimmtes Integral ausdrücken. Zu dem Ende setzen wir in der Gleichung

$$1.\quad \frac{1}{\sqrt{(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)}} = P_0 + P_1\alpha + P_2\alpha^2 + \cdots + P_n\alpha^n + \cdots$$

$e^{\psi i}$ statt α, wo ψ einen von γ unabhängigen Winkel zwischen 0 und π bedeutet. Dadurch nimmt die rechte Seite dieser Gleichung die Form $G + Hi$ an, wo

$$G = P_0 + P_1\cos\psi + P_2\cos 2\psi + \cdots + P_n\cos n\psi + \cdots$$
$$H = P_1\sin\psi + P_2\sin 2\psi + \cdots + P_n\sin n\psi + \cdots$$

Der reelle und imaginäre Theil der linken Seite hat eine verschiedene Form, jenachdem ψ kleiner oder grösser als γ ist. Der reelle Theil

ist im ersten Fall $\frac{\cos\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{(2(\cos\psi-\cos\gamma))}}$, und im zweiten Fall

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{(2(\cos\gamma-\cos\psi))}};$$

es ist also auch

$$G=\frac{\cos\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{(2(\cos\psi-\cos\gamma))}} \text{ oder } G=\frac{\sin\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{(2(\cos\gamma-\cos\psi))}},$$

jenachdem $\psi<\gamma$, oder $\psi>\gamma$. Ebenso findet man

$$H=\frac{-\sin\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{(2(\cos\psi-\cos\gamma))}} \text{ oder } H=\frac{\cos\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{(2(\cos\gamma-\cos\psi))}},$$

jenachdem $\psi<\gamma$, oder $\psi>\gamma$.

Nach der bekannten Theorie der Sinus- und Cosinusreihen ist aber

$$P_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi G\cos n\psi\,d\psi \text{ und } P_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi H\sin n\psi\,d\psi.$$

Zerlegt man jedes dieser Integrale in zwei andere Theile zwischen den Grenzen 0 und γ, γ und π, und substituirt dann für G und H ihre oben angegebenen Werthe, so wird

$$2.\quad P_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma\frac{\cos n\psi\cos\frac{1}{2}\psi\,d\psi}{\sqrt{(2(\cos\psi-\cos\gamma))}}+\frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi\frac{\cos n\psi\sin\frac{1}{2}\psi\,d\psi}{\sqrt{(2(\cos\gamma-\cos\psi))}};$$

$$3.\quad P_n=-\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma\frac{\sin n\psi\sin\frac{1}{2}\psi\,d\psi}{\sqrt{(2(\cos\psi-\cos\gamma))}}+\frac{2}{\pi}\int_\gamma^\pi\frac{\sin n\psi\cos\frac{1}{2}\psi\,d\psi}{\sqrt{(2(\cos\gamma-\cos\psi))}}.$$

Hierbei ist es wesentlich zu bemerken, dass, nach der genannten Theorie, für $n=0$ das zweite Glied der Gleichung 2. sich auf die Hälfte reducirt, und dass die Gleichung 3. für diesen Fall ihre Gültigkeit verliert, indem P_0 gar nicht in der Reihe H vorkommt.

Diese Entwicklung des doppelten Ausdruckes für P_n ist nicht strenge, weil wir nicht bewiesen haben, dass die Reihen G und H convergiren. Diese Convergenz findet, mit Ausnahme von $\psi=\gamma$, in der That statt. Wir ziehen es aber vor, *a posteriori* zu zeigen, dass die vorstehenden Ausdrücke wirklich die Coefficienten der Entwicklung der Wurzelgrösse

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)}}$$

sind. Bezeichnet man mit Q_n das erste der zwei Integrale der Gleichung 2., so hat man

$$Q_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\gamma\frac{\cos n\psi\cos\frac{1}{2}\psi}{\sqrt{(2(\cos\psi-\cos\gamma))}}\,d\psi,$$

und der numerische Werth des Q_n ist offenbar kleiner als

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\gamma}\frac{\cos\frac{1}{2}\psi\,d\psi}{\sqrt{(2\,(\cos\psi-\cos\gamma))}}=1.$$

Die Reihe

$$\tfrac{1}{2}Q_0+Q_1\alpha+Q_2\alpha^2+\cdots+Q_n\alpha^n+\cdots,$$

in welcher α einen positiven oder negativen echten Bruch bezeichnet, ist also convergent. Um ihre Summe zu erhalten, setzen wir an die Stelle von Q_0, Q_1, $Q_2\cdots$ das, was diese Buchstaben bedeuten. So erhält man

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\gamma}\frac{\cos\frac{1}{2}\psi\,d\psi}{\sqrt{(2\,(\cos\psi-\cos\gamma))}}\left(\tfrac{1}{2}+\alpha\cos\psi+\alpha^2\cos 2\psi+\cdots\right),$$

oder, wenn man die convergente Reihe unter dem Integralzeichen durch ihren bekannten Werth $\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2}$ ersetzt,

$$\frac{1-\alpha^2}{\pi}\int_0^{\gamma}\frac{\cos\frac{1}{2}\psi\,d\psi}{\sqrt{(2\,(\cos\psi-\cos\gamma))}}\,\frac{1}{1-2\alpha\cos\psi+\alpha^2}.$$

Durch die Substitution $s\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\psi}{2}$, geht dies Integral über in

$$\frac{1-\alpha^2}{\pi}\int_0^{1}\frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)}}\,\frac{1}{(1-\alpha)^2+4\alpha\sin^2\frac{\gamma}{2}s^2}.$$

Führt man diese Integration nach den bekannten Methoden aus, so erhält man

$$\frac{1}{2}\,\frac{1+\alpha}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)}}=\tfrac{1}{2}Q_0+Q_1\alpha+Q_2\alpha^2+\cdots+Q_n\alpha^n+\cdots$$

Aehnlich könnte man die Summe der Reihe

$$\tfrac{1}{2}R_0+R_1\alpha+R_2\alpha^2+\cdots+R_n\alpha^n+\cdots$$

erhalten, indem R_n das zweite Integral der Gleichung 2. bedeutet. Aber einfacher erhält man diese Summe durch folgende Betrachtung. Das allgemeine Glied

$$R_n\alpha^n=\frac{2}{\pi}\alpha^n\int_{\gamma}^{\pi}\frac{\cos n\psi\sin\frac{1}{2}\psi\,d\psi}{\sqrt{(2\,(\cos\gamma-\cos\psi))}}$$

geht durch die Substitution $\psi=\pi-\psi$, wenn man beachtet, dass $\cos n\,(\pi-\psi)=(-1)^n\cos n\psi$, über in

$$\frac{2}{\pi}(-\alpha)^n\int_0^{\pi-\gamma}\frac{\cos n\psi\cos\frac{1}{2}\psi\,d\psi}{\sqrt{(2\,(\cos\psi-\cos(\pi-\gamma)))}}.$$

Dies allgemeine Glied resultirt aus dem der schon summirten Reihe, nämlich aus

$$Q_n \alpha^n = \frac{2}{\pi} \alpha^n \int_0^\gamma \frac{\cos n\psi \cos \frac{1}{2} \psi d\psi}{\sqrt{(2 (\cos \psi - \cos \gamma))}},$$

wenn man zugleich α mit $-\alpha$ und γ mit $\pi - \gamma$ vertauscht. Man findet also

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \alpha}{\sqrt{(1 - 2\alpha \cos \gamma + \alpha^2)}} = \tfrac{1}{2} R_0 + R_1 \alpha + R_2 \alpha^2 + \cdots + R_n \alpha^n + \cdots$$

und durch Addition der zwei Reihen

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - 2\alpha \cos \gamma + \alpha^2)}} = \tfrac{1}{2} P_0 + P_1 \alpha + P_2 \alpha^2 + \cdots + P_n \alpha^n + \cdots,$$

wo P_n die Bedeutung des Ausdrucks 2. hat, was zu beweisen war.

Um die Gleichung 3. zu verificiren, welche nicht für $n = 0$ gilt, betrachten wir zuerst die Reihe, deren allgemeines Glied das Product aus α^n und dem ersten der darin vorkommenden Integrale ist. Dies allgemeine Glied ist

$$-\frac{2}{\pi} \alpha^n \int_0^\gamma \frac{\sin n\psi \sin \frac{1}{2} \psi d\psi}{\sqrt{(2 (\cos \psi - \cos \gamma))}}.$$

Es ist also folgende Summe zu bilden

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\sin \frac{1}{2} \psi d\psi}{\sqrt{(2 (\cos \psi - \cos \gamma))}} (\alpha \sin \psi + \alpha^2 \sin 2\psi + \cdots)$$

$$= -\frac{2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\sin \frac{1}{2} \psi d\psi}{\sqrt{(2 (\cos \psi - \cos \gamma))}} \frac{\alpha \sin \psi}{1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2}.$$

Beachtet man, dass

$$\frac{\alpha \sin \psi \sin \frac{1}{2} \psi}{1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2} = \tfrac{1}{2} \cos \tfrac{1}{2} \psi - \tfrac{1}{2} \frac{(1 - \alpha)^2 \cos \frac{1}{2} \psi}{1 - 2\alpha \cos \psi + \alpha^2},$$

so wird der vorstehende Ausdruck

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos \frac{1}{2} \psi d\psi}{\sqrt{(2(\cos\psi - \cos\gamma))}} + \frac{(1-\alpha)^2}{\pi} \int_0^\gamma \frac{\cos \frac{1}{2} \psi d\psi}{\sqrt{(2(\cos\psi - \cos\gamma))}} \cdot \frac{1}{1 - 2\alpha\cos\psi + \alpha^2}.$$

Setzt man für diese beiden Integrale, von denen das erste schon bei der Summirung der Reihe $\frac{1}{2} Q_0 + Q_1 \alpha + \cdots$ vorkam, ihre Werthe, so erhält man

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1 - \alpha}{\sqrt{(1 - 2\alpha \cos \gamma + \alpha^2)}}.$$

Betrachtet man zweitens die Reihe, deren allgemeines Glied das zweite der Integrale 3. multiplicirt mit α^n ist, so sieht man, wie oben, dass diese Reihe aus der eben summirten resultirt, indem man gleichzeitig α mit $-\alpha$ und γ mit $\pi-\gamma$ vertauscht. Die Summe dieser Reihe ist also

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1+\alpha}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)}}.$$

Vereinigt man diese beiden Resultate, so erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2)}}=1+P_1\alpha+P_2\alpha^2+\cdots+P_n\alpha^n+\cdots,$$

wo P durch die Gleichung 3. gegeben ist, welche somit verificirt ist.

Wir können jetzt übergehen zur Betrachtung der Reihe

$$4.\quad \frac{1}{4\pi}\sum(2n+1)\int\limits_0^\pi d\vartheta'\sin\vartheta'\int\limits_0^{2\pi}P_n f(\vartheta',\varphi')\,d\varphi',$$

wo die Summe auszudehnen ist über alle Werthe von 0 bis ∞, und die Function $f(\vartheta',\varphi')$ willkürlich, d. h. ohne einem bestimmten analytischen Gesetz unterworfen zu sein, gegeben ist von $\vartheta'=0$, $\varphi'=0$, bis $\vartheta'=\pi$, $\varphi'=2\pi$. Es wird nur vorausgesetzt, dass diese Function zwischen diesen Grenzen nicht unendlich wird. Es ist P_n der Coefficient von α^n in der Entwicklung der Wurzelgrösse

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2\alpha(\cos\vartheta\cos\vartheta'+\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi'-\varphi))+\alpha^2)}}.$$

Man erhält diesen Coefficienten, wenn man in einem der für P_n erhaltenen Ausdrücke $\cos\vartheta\cos\vartheta'+\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi'-\varphi)$ für $\cos\gamma$ setzt. Um die Reihe 4. zu summiren, betrachten wir zunächst die Summe ihrer $(n+1)$ ersten Glieder, und zeigen, dass diese Summe gegen eine Grenze convergirt, wenn man n wachsen lässt. Wir setzen zunächst $\vartheta=0$; auf diesen Fall lässt sich hernach leicht der Fall, wo diese Variable irgend einen Werth hat, reduciren. Für $\vartheta=0$ hat man $\cos\gamma=\cos\vartheta'$, und P_n enthält die Variable φ' nicht. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\vartheta',\varphi')\,d\varphi'=F(\vartheta'),$$

und schreibt γ statt ϑ', so wird die Summe der $(n+1)$ ersten Glieder der Reihe

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi\big(P_0+3P_1+5P_2+\cdots+(2n+1)P_n\big)\,F(\gamma)\sin\gamma\,d\gamma.$$

Da der Buchstabe ϑ' schon durch γ ersetzt ist, so werden die Aus-

drücke für P_0, P_1, $P_2 \cdots$ diejenigen sein, welche aus den Gleichungen 2. und 3. resultiren, ohne daran irgend etwas zu ändern.

Die vorstehende Summe kann in diese beiden zerlegt werden

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\pi (P_0 + P_1 + P_2 + \cdots + P_n)\, F(\gamma) \sin \gamma d\gamma$$

$$U = \int_0^\pi (P_1 + 2P_2 + \cdots + nP_n)\, F(\gamma) \sin \gamma d\gamma,$$

welche wir nach einander bestimmen werden. Wir setzen in der ersten für P_0, $P_1 \cdots P_n$ die durch die Gleichung 2. gegebenen Werthe, und erhalten mit Rücksicht auf die bekannte Formel

$$1 + 2\cos\psi + 2\cos 2\psi + \cdots + 2\cos n\psi = \frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}},$$

$$T = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\gamma F(\gamma)\sin\gamma \left(\int_0^\gamma \frac{\cos\frac{\psi}{2}}{\sqrt{2(\cos\psi - \cos\gamma)}} \frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} d\psi \right.$$
$$\left. + \int_\gamma^\pi \frac{\sin\frac{\psi}{2}}{\sqrt{2(\cos\gamma - \cos\psi)}} \frac{\sin(2n+1)\frac{\psi}{2}}{\sin\frac{\psi}{2}} d\psi \right).$$

Obgleich die auf ψ bezüglichen Integrationen zwischen Grenzen auszuführen sind, die von der Variablen γ abhängen, auf welche sich die andere Integration bezieht, kann man doch die Reihenfolge der Integrationen umkehren, mit Hilfe folgender Formel

$$5. \quad \int_0^a dx \int_0^x \varphi(x, y)\, dy = \int_0^a dy \int_y^a \varphi(x, y)\, dx.$$

Die Richtigkeit dieser Formel ergiebt sich leicht aus folgender geometrischen Betrachtung. Seien x, y, $\varphi(x, y)$ die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punktes einer krummen Oberfläche, so sieht man auf der Stelle, dass jedes der vorstehenden Integrale den Raum darstellt, der enthalten ist zwischen der Oberfläche, der Ebene der x, y und den drei auf dieser letzten senkrechten Ebenen, deren Gleichungen sind $y = 0$, $x = a$ und $y = x$.

Man transformirt den ersten Theil von T, indem man ihn vergleicht mit der linken Seite der vorstehenden Gleichung, und diese linke Seite durch die rechte ersetzt; umgekehrt verfährt man mit dem zweiten Theil von T. So findet man:

$$T = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin (2n+1) \frac{\psi}{2}}{\sin \frac{\psi}{2}} \Pi(\psi) d\psi,$$

wo

$$\Pi(\psi) = \cos \tfrac{1}{2} \psi \int_\psi^\pi \frac{F(\gamma) \sin \gamma d\gamma}{\sqrt{(2(\cos\psi - \cos\gamma))}} + \sin \tfrac{1}{2} \psi \int_0^\psi \frac{F(\gamma) \sin \gamma d\gamma}{\sqrt{(2(\cos\gamma - \cos\psi))}}.$$

$\Pi(\psi)$ ist eine Function von ψ, die für jeden Werth von ψ zwischen 0 und π endlich bleibt. Denn ist M, abgesehen vom Zeichen, der grösste Werth, den $F(\gamma)$ in dem Intervall von $\gamma = 0$ bis $\gamma = \pi$ annimmt, so ist klar, dass der numerische Werth des Integrals

$$\int_\psi^\pi \frac{F(\gamma) \sin \gamma d\gamma}{\sqrt{(2(\cos\psi - \cos\gamma))}}$$

kleiner ist als

$$M \int_\psi^\pi \frac{\sin \gamma d\gamma}{\sqrt{(2(\cos\psi - \cos\gamma))}} = 2M \cos \frac{\psi}{2}.$$

Das andere Integral ist kleiner als $2M \sin \frac{\psi}{2}$, und folglich ist $\Pi(\psi)$ kleiner als $2M$.

Da die Function $\Pi(\psi)$ nicht unendlich wird, so lässt sich leicht die Grenze bestimmen, gegen welche T convergirt, vermittelst eines Satzes aus der Theorie der Sinus- und Cosinusreihen, welcher lautet:

Wenn die Function $f(\beta)$ endlich bleibt von $\beta = 0$ bis $\beta = h$ (wo $0 < h \leqq \frac{1}{2}\pi$), so convergirt das Integral

$$\int_0^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta$$

gegen $\frac{1}{2}\pi f(0)$, wenn die positive Grösse k unendlich wird.

Es ist nöthig zu bemerken, und soll nachträglich bewiesen werden, dass dieser Satz auch dann noch gilt, wenn $f(\beta)$ für einen oder mehrere Werthe von β zwischen 0 und h unendlich wird, wenn dann nur $\int_0^\beta f(\beta) d\beta = F(\beta)$ zwischen 0 und h endlich und stetig bleibt.

Setzt man $\psi = 2\beta$, so ist

$$T = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin (2n+1)\beta}{\sin \beta} \Pi(2\beta) d\beta,$$

und es ergiebt sich unmittelbar aus jenem Theorem, dass die Grenze von T für wachsende n gleich ist $\frac{1}{2}\Pi(0)$, d. i. $\frac{1}{2}\int_0^\pi F(\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}\,d\gamma$.

Wir betrachten jetzt die Reihe U. Für $P_1, P_2 \cdots P_n$ setzen wir die Ausdrücke, welche die Gleichung 3. giebt, und kehren dann die Reihenfolge der Integrationen um mit Hilfe der Formel 5.; so erhalten wir

$$6.\quad U = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Theta(\psi)(\sin\psi + 2\sin 2\psi + \cdots + n\sin n\psi)\,d\psi,$$

wo

$$\Theta(\psi) = -\sin\tfrac{1}{2}\psi\int_\psi^\pi \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,d\gamma}{\sqrt{(2(\cos\psi-\cos\gamma))}} + \cos\tfrac{1}{2}\psi\int_0^\psi \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,d\gamma}{\sqrt{(2(\cos\gamma-\cos\psi))}}.$$

Da die beiden Integrale, welche $\Theta(\psi)$ enthält, dieselben sind, welche in $\Pi(\psi)$ vorkommen, so schliesst man wie vorhin, dass die Function $\Theta(\psi)$ nicht unendlich wird. Aber wir müssen auch noch beweisen, dass die Function $\Theta(\psi)$ von $\psi = 0$ bis $\psi = \pi$ stetig ist. Diese Eigenschaft findet auch dann noch statt, wenn auch die Function $F(\gamma)$, welche in $\Theta(\psi)$ enthalten ist, unstetig sein sollte. Es ist immer festzuhalten, dass $F(\gamma)$ endlich bleiben muss, was offenbar der Fall ist, so lange die Function $f(\vartheta', \varphi')$ endlich bleibt. Uebrigens ist auch die Function $\Pi(\psi)$ stetig, doch dies kam für die Reihe T nicht in Betracht.

Um die Stetigkeit von $\Theta(\psi)$ nachzuweisen, ist es offenbar hinreichend, zu zeigen, dass jedes der beiden Integrale, die $\Theta(\psi)$ enthält, stetig ist. Wenn in dem zweiten dieser Integrale ψ um die Grösse ε wächst, so wächst das Integral um

$$\int_0^{\psi+\varepsilon} \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,d\gamma}{\sqrt{(2(\cos\gamma-\cos(\psi+\varepsilon)))}} - \int_0^\psi \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,d\gamma}{\sqrt{(2(\cos\gamma-\cos\psi))}}.$$

Dieser Differenz kann man folgende Form geben

$$-\int_0^\psi F(\gamma)\left[\frac{\sin\gamma}{\sqrt{(2(\cos\gamma-\cos\psi))}} - \frac{\sin\gamma}{\sqrt{(2(\cos\gamma-\cos(\psi+\varepsilon)))}}\right]d\gamma$$

$$+\int_\psi^{\psi+\varepsilon} \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,d\gamma}{\sqrt{(2(\cos\gamma-\cos(\psi+\varepsilon)))}}.$$

Da der Factor von $F(\gamma)$ in dem ersten dieser beiden Integrale innerhalb der Integrationsgrenzen offenbar immer positiv bleibt, so ist das Integral, abgesehen vom Zeichen, kleiner als das Integral dieses Factors multiplicirt mit dem grössten Werth von $F(\gamma)$, welchen wir, wie oben, durch M bezeichnen. Führt man die letztere Integration aus,

so findet man, dass der numerische Werth des Integrals nicht grösser sein kann als

$$2M\left(\sin\frac{\psi}{2}-\sin\frac{\psi+\varepsilon}{2}+\sqrt{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(\psi+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)}\right).$$

Ebenso findet man, dass der numerische Werth des zweiten Integrals kleiner ist als

$$2M\sqrt{\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(\psi+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)}.$$

Da die vorstehenden Ausdrücke mit ε verschwinden, so ist das Integral

$$\int_0^\psi \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,d\gamma}{\sqrt{(2(\cos\gamma-\cos\psi))}}$$

eine stetige Function von ψ. Dasselbe lässt sich ebenso von dem zweiten in $\Theta(\psi)$ vorkommenden Integral zeigen. Die Stetigkeit von $\Theta(\psi)$ ist somit bewiesen.

Man sieht auf der Stelle, dass diese Function für die Werthe $\psi=0$ und $\psi=\pi$ verschwindet, oder dass diese beiden Gleichungen stattfinden

$$7.\quad \Theta(0)=0,\qquad \Theta(\pi)=0.$$

Wir setzen zur Abkürzung $\frac{d\Theta(\psi)}{d\psi}=\Theta'(\psi)$, und untersuchen, was $\Theta'(\psi)$ wird, wenn ψ den Werth 0 bekommt. Bezeichnen wir die beiden in $\Theta(\psi)$ enthaltenen Integrale durch r und s, so ist

$$\Theta(\psi)=-r\sin\frac{\psi}{2}+s\cos\frac{\psi}{2},$$

mithin, durch Differentiation,

$$\Theta'(\psi)=-\frac{1}{2}.r\cos\frac{\psi}{2}-\frac{1}{2}s\sin\frac{\psi}{2}-\frac{dr}{d\psi}\sin\frac{\psi}{2}+\frac{ds}{d\psi}\cos\frac{\psi}{2}.$$

Für $\psi=0$ ist offenbar

$$r=\int_0^\pi F(\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}\,d\gamma,\quad s=0.$$

Um $\frac{ds}{d\psi}$ für $\psi=0$ zu bestimmen, beachte man, dass, wegen $s=0$, $\frac{ds}{d\psi}$ offenbar die Grenze des Verhältnisses

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \frac{F(\gamma)\sin\gamma\,d\gamma}{\sqrt{(2(\cos\gamma-\cos\varepsilon))}}$$

ist, wenn die positive Grösse ε abnimmt. Dieses Verhältniss ist enthalten zwischen

$$\frac{g}{\varepsilon}\int\limits_0^\varepsilon \frac{\sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{(2\,(\cos\gamma - \cos\varepsilon))}} \quad \text{und} \quad \frac{h}{\varepsilon}\int\limits_0^\varepsilon \frac{\sin\gamma\, d\gamma}{\sqrt{(2\,(\cos\gamma - \cos\varepsilon))}},$$

oder, was dasselbe sagt, zwischen

$$g\,\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\frac{1}{2}\varepsilon} \quad \text{und}\ h\,\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\frac{1}{2}\varepsilon},$$

wo g und h die äussersten Werthe von $F(\gamma)$ in dem Integrationsintervall bezeichnen. Da die vorstehenden Ausdrücke gegen die Grenze $F(0)$ convergiren, so ist $\frac{ds}{d\psi} = F(0)$, für $\psi = 0$. Man findet in ganz ähnlicher Weise den Werth von $\frac{dr}{d\psi}$ für $\psi = 0$; es würde übrigens genügen, sich zu überzeugen, dass dieser Werth nicht unendlich werden kann. Aus dem Vorstehenden schliesst man

$$8.\quad \Theta'(0) = F(0) - \tfrac{1}{2}\int\limits_0^\pi F(\gamma)\cos\tfrac{1}{2}\gamma\, d\gamma.$$

Wir nehmen jetzt den Ausdruck 6. für U wieder auf. Giebt man der Reihe

$$\sin\psi + 2\sin 2\psi + \cdots + n\sin n\psi$$

die Form

$$-\frac{d}{d\psi}\left(\tfrac{1}{2} + \cos\psi + \cos 2\psi + \cdots + \cos n\psi\right) = -\tfrac{1}{2}\frac{d}{d\psi}\,\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi},$$

so wird

$$U = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \Theta(\psi)\,\frac{d}{d\psi}\,\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi}\,d\psi,$$

und hieraus durch theilweise Integration

$$U = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \Theta'(\psi)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi}\,d\psi,$$

indem das vor das Integralzeichen tretende Glied

$$-\,\Theta(\psi)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}\psi}{\sin\frac{1}{2}\psi}$$

verschwindet, weil $\Theta(\psi)$ für die Integrationsgrenzen $\psi = 0$ und $\psi = \pi$ nach 7. verschwindet. Die theilweise Integration ist statthaft, weil $\Theta(\psi)$, wie gezeigt, innerhalb der Integrationsgrenzen stetig ist. Nun sieht man klar, mit Hilfe jenes schon für T benutzten Theorems, dass U gegen die Grenze $\Theta'(0)$, d. h., nach 8., gegen die Grenze

$$F(0) - \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi F(\gamma)\cos\tfrac{1}{2}\gamma\, d\gamma$$

convergirt, und zwar selbst dann, wenn die Function $\Theta'(\psi)$ für gewisse Werthe von ψ unendlich werden sollte; denn dieser Umstand nimmt dem Satze, wie schon bemerkt, seine Gültigkeit nicht, so lange nur das Integral $\int\limits_0^{\psi} \Theta'(\psi)d\psi = \Theta(\psi)$ endlich und stetig bleibt, was in der That der Fall ist.

Vereinigt man die erhaltenen Resultate, so ist klar, dass die Summe $S = T + U$ für wachsende Werthe von n gegen die Grenze $F(0)$ convergirt. Hieraus folgt, dass die Reihe 4., wenn man darin $\vartheta = 0$ setzt, convergent ist, und zur Summe $F(0)$ hat; und da

$$F(\vartheta') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi')\, d\varphi',$$

so ist diese Summe das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(0, \varphi') d\varphi'.$$

Auf diesen speciellen Fall lässt sich der allgemeine Fall, wo man ϑ und φ in der Reihe 4. beliebige Werthe beilegt, leicht durch eine geometrische Betrachtung zurückführen. Man denke sich eine Kugelfläche mit dem Radius 1, und lege durch einen festen Punkt derselben einen Bogen eines grössten Kreises, der gleichfalls als fest betrachtet und nur nach einer Seite hin verlängert werden soll. Die Lage irgend eines Punktes der Kugelfläche ist bestimmt durch den zwischen diesem Punkt und dem festen Punkt enthaltenen Bogen eines grössten Kreises und durch den Winkel, welchen dieser Bogen mit jenem festen Bogen bildet. Durch diese beiden sphärischen Polarcoordinaten, die wir ϑ' und φ' nennen wollen, lässt sich offenbar die Lage eines jeden Punktes der Kugelfläche bestimmen, wenn man ϑ' alle Werthe zwischen 0 und π, und φ' alle Werthe zwischen 0 und 2π ertheilt; das auf diese Coordinaten bezogene Element der Kugelfläche hat zum Ausdruck $\sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'$. Das Integral

$$F(\vartheta') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\vartheta', \varphi')\, d\varphi'$$

ist der mittlere Werth aus allen Werthen der Function $f(\vartheta', \varphi')$, welche den verschiedenen Punkten der Peripherie eines um den festen Punkt als Mittelpunkt mit dem sphärischen Radius ϑ' beschriebenen Kreises entsprechen. Wenn die Function $f(\vartheta', \varphi')$ für $\vartheta' = 0$ unabhängig von φ' wird, so ist

$$F(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(0, \varphi')\, d\varphi' = f(0, \varphi'),$$

und die Summe der Reihe 4. wird mit dem im Anfangspunkt der Coordinaten stattfindenden Werth der Function $f(\vartheta', \varphi')$ zusammenfallen. In dem allgemeinen Fall hingegen, wo für $\vartheta' = 0$ die Function $f(\vartheta', \varphi')$ nicht unabhängig von φ' wird, wird dieselbe in dem Coordinatenanfangspunkt unendlich viele verschiedene Werthe haben und rings um denselben herum unstetig sein. Da die Summe der Reihe 4. immer den Werth $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(0, \varphi')d\varphi'$ hat, so wird dieselbe in letzterem Falle gleich dem mittleren Werth aus allen Werthen von $f(\vartheta', \varphi')$ sein, welche auf der Peripherie eines unendlich kleinen Kreises, dessen Centrum der Coordinatenanfangspunkt ist, stattfinden.

Um nun von dem Fall, wo $\vartheta = 0$ ist, überzugehen zu dem allgemeinen Fall, wo ϑ und φ beliebige Werthe (die aber kleiner als π und 2π sind) haben, betrachte man aufmerksam das allgemeine Glied der Reihe 4. in jedem der beiden Fälle. In beiden Fällen ist dasselbe ausgedrückt durch ein Doppelintegral, welches über die ganze Kugelfläche auszudehnen ist, und dessen Element ein Product aus zwei Factoren ist. Der erste Factor $f(\vartheta', \varphi') \sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi'$, d. i. das Flächenelement multiplicirt mit dem daselbst stattfindenden Werth von $f(\vartheta', \varphi')$, ist für beide Fälle derselbe; ein Unterschied findet nur in Bezug auf den zweiten Factor P_n statt. In dem ersten Fall ist dieser Factor P_n eine gewisse Function von der sphärischen Entfernung ϑ' des Oberflächenelements vom Coordinatenanfangspunkt, und im zweiten Fall ist P_n dieselbe Function von γ, wo γ durch die Gleichung

$$\cos\gamma = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos(\varphi' - \varphi)$$

gegeben ist, und da γ, wie aus der Trigonometrie bekannt, die Entfernung der beiden Punkte ist, welche die Coordinaten ϑ, φ und ϑ', φ' haben, so ist klar, dass die beiden Fälle sich nur dadurch unterscheiden, dass der Anfangspunkt für die Entfernungen, welcher im ersten Fall mit dem Coordinatenanfangspunkt zusammenfällt, sich im zweiten Fall in irgend einem Punkt ϑ, φ befindet. Die Natur der Reihe 4. ist also in jedem der beiden Fälle dieselbe. Man kann daher das oben gefundene Resultat auf den allgemeinen Fall übertragen, und findet so, dass die Reihe 4. eine convergente Reihe ist und dass die Summe derselben der mittlere Werth aller Werthe der Function $f(\vartheta', \varphi')$ ist, welche stattfinden in den verschiedenen Punkten der Peripherie eines unendlich kleinen Kreises, der den Punkt (ϑ, φ) zum Mittelpunkt hat.

Wenn demnach um den Punkt (ϑ, φ) herum die Function $f(\vartheta', \varphi')$ nicht unstetig ist, so fällt jener mittlere Werth mit $f(\vartheta, \varphi)$ zusammen, welches dann die Summe der Reihe 4. ist.

Nachtrag.

Es ist noch zu zeigen, dass der in diesem Beweis benutzte Satz aus der Theorie der Sinus- und Cosinusreihen auch dann gilt, wenn $f(\beta)$ für einen oder mehrere Werthe von β zwischen 0 und h unendlich wird, wenn dann nur $F(\beta) = \int_0^\beta f(\beta) d\beta$ zwischen 0 und h endlich und stetig bleibt.

Aus der Theorie der Sinus- und Cosinusreihen ist auch dieser Satz bekannt:

Wenn die Function $f(\beta)$ von $\beta = g$ bis $\beta = h$ endlich bleibt (wo $0 < g < h \overline{\overline{<}} \frac{1}{2}\pi$), so verschwindet das Integral

$$\int_g^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta$$

für $k = \infty$.

Nehmen wir nun an, dass $f(\beta)$ nur für $\beta = c$ unendlich wird, indem die folgenden Schlüsse leicht auszudehnen sind auf den Fall einer grösseren Anzahl von Werthen. Sei ε eine positive Grösse, welche wir als unveränderlich voraussetzen, während k über jede Grenze hinaus wächst; wir zerlegen das Integral $\int_0^h f(\beta) \frac{\sin k\beta}{\sin \beta} d\beta$ in vier andere, die resp. folgende Grenzen haben:

$$0 \text{ und } c - \varepsilon; \; c - \varepsilon \text{ und } c; \; c \text{ und } c + \varepsilon; \; c + \varepsilon \text{ und } h.$$

Da die Function $f(\beta)$ nicht unendlich wird innerhalb der Grenzen des ersten und vierten dieser neuen Integrale, so werden diese beiden Integrale, für $k = \infty$, resp. $\frac{1}{2}\pi f(0)$ und 0. Was die zwei anderen Integrale anbetrifft, so kann die willkürliche Grösse ε so klein gewählt werden, dass $f(\beta)$ immer dasselbe Zeichen behält von $\beta = c - \varepsilon$ bis $\beta = c$, und ebenfalls dasselbe Zeichen von $\beta = c$ bis $\beta = c + \varepsilon$, indem freilich das letzte Zeichen verschieden sein kann von dem ersten, da ja $f(\beta)$ beim Uebergang durch das Unendliche sein Zeichen wechseln kann. Dann ist klar, dass das zweite und dritte Integral, abgesehen vom Zeichen, *und was auch k sei,* resp. kleiner sein werden als die Grössen

$$\frac{F(c) - F(c - \varepsilon)}{\sin (c - \varepsilon)}, \quad \frac{F(c + \varepsilon) - F(c)}{\sin c.}.$$

Da $F(\beta)$ nach der Annahme eine stetige Function von β ist, und c von 0 und von jedem anderen Vielfachen von π verschieden ist (da ja $c < \frac{1}{2}\pi$), so ist klar, dass die vorstehenden Grössen kleiner als jede gegebene Grösse werden können, wenn man ε hinreichend klein wählt.

Folglich ist $\frac{1}{2}\pi f(0)$ die Grenze des Integrals $\int\limits_0^\beta f(\beta)\,\frac{\sin k\beta}{\sin\beta}\,d\beta$ für wachsende k.

[22]) Da dieser Ausdruck immer positiv ist, so ist der Winkel ϑ_0 spitz. Jener Kreis theilt die Kugelfläche also in zwei ungleiche Theile, und zwar ist der dem Punkte μ zugewandte, auf dem sich die mit μ ungleichartige Elektricität befindet, der kleinere. Das Verhältniss jener beiden Theile nähert sich der Einheit mit wachsender Entfernung des Punktes μ von der Kugel. Die auf jedem der beiden Theile befindliche Elektricitätsmenge ist, abgesehen vom Zeichen, gleich dem Integral

$$a^2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\vartheta_0} k \sin\vartheta\, d\vartheta.$$

Die Integration ergiebt

$$M = \frac{\mu}{4}\left(3\left(1-\left(\frac{a}{c}\right)^2\right)^{\frac{2}{3}} - \left(3+\left(\frac{a}{c}\right)^2\right)\right).$$

[23]) Dieser Satz rührt von *Poisson* her. Die betreffende Abhandlung *Poisson's* findet sich im Bullet. de la soc. philom. 1824. 49; auch im Bullet. univ. des sc. math. II. 146; im Auszug in den Ann. de Ch. et de Ph. 1824. Févr.

[24]) Dies Problem hat *Poisson* in der schon unter [14]) citirten Abhandlung aufgestellt und gelöst. Die hier gegebene Lösung ist im Wesentlichen die *Poisson*'sche.

[25]) Der Beweis beruht auf einem Satze von *Legendre*, nach welchem

$$\int\limits_0^{2\pi} P_n(\cos\omega)\, d\varphi' = 2\pi\, P_n(\cos\vartheta)\, P_n(\cos\vartheta') \tag{1}$$

ist, wo

$$\cos\omega = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\varphi'$$

ist. (S. *Heine*, Handbuch der Kugelfunctionen 1861. §. 67.)

Das aus den einzelnen Massen A, B ... bestehende Massensystem liege symmetrisch um irgend eine Axe. Die Masse A umschliesse schalenförmig einen massenleeren Raum. Der Punkt O gehöre dem Stück der Axe innerhalb A an, auf welchem das Potential des Massensystems als constant vorausgesetzt wird. Wir nehmen diesen Punkt O als Pol eines Polarcoordinatensystems an, und die Axe als die feste Linie, von welcher aus die Winkel gezählt werden sollen. Die Polarcoordinaten irgend eines Punktes des Massensystems seien ϱ', ϑ', φ'; der Punkt, auf welchen das Massensystem wirkt, habe die Coordinaten ϱ, ϑ, 0, indem man die Coordinate φ desselben, der Allgemeinheit unbeschadet, gleich Null setzen kann.

Wir wollen annehmen, dass sämmtliche Massen A, B ..., wie es in unserem Problem der Fall ist, über Flächen vertheilt sind; sollten

übrigens einige derselben, oder alle, einen Raum ausfüllen, so werden die folgenden Schlüsse dadurch nicht wesentlich modificirt. Nennen wir das Potential des Massensystems V, und den Factor, womit $d\vartheta' d\varphi'$ zu multipliciren ist, um die auf irgend einem Flächenelement befindliche Masse zu erhalten, k', so ist*)

$$V = \int \frac{k' d\vartheta' d\varphi'}{\sqrt{(\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos\omega)}},$$
$$\cos\omega = \cos\vartheta \cos\vartheta' + \sin\vartheta \sin\vartheta' \cos\varphi'.$$

Die Integration erstreckt sich über sämmtliche Massenelemente. Die kleinste Entfernung des Punktes O von irgend einem Punkte der Masse A sei R, und r irgend eine Grösse, die kleiner als R ist; dann lässt sich die Grösse $\frac{1}{\sqrt{(\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos\omega)}}$ für alle Punkte, die innerhalb der Kugel liegen, deren Mittelpunkt O, und deren Radius r ist, in diese convergirende, nach Potenzen von $\frac{\varrho}{\varrho'}$ fortschreitende Reihe entwickeln:

$$\frac{1}{\varrho'} P_0(\cos\omega) + \frac{\varrho}{\varrho'^2} P_1(\cos\omega) + \frac{\varrho^2}{\varrho'^3} P_2(\cos\omega) + \cdots$$

Für alle jene Punkte ist demnach, da k' und ϱ' der Voraussetzung zufolge von φ' unabhängig sind,

$$V = \int_0^{\pi} d\vartheta' \left\{ \sum \left[\frac{k'}{\varrho'}\right] \int_0^{2\pi} P_0(\cos\omega) d\varphi' + \varrho \sum \left[\frac{k'}{\varrho'^2}\right] \int_0^{2\pi} P_1(\cos\omega)\, d\varphi' \right.$$
$$\left. + \varrho^2 \sum \left[\frac{k'}{\varrho'^3}\right] \int_0^{2\pi} P_2(\cos\omega)\, d\varphi' + \cdots \right\},$$

wo das Summenzeichen Σ sich auf sämmtliche Massenelemente bezieht, die demselben Winkel ϑ' entsprechen. Berücksichtigt man nun die Gleichung (1), so lässt sich die vorstehende Gleichung auch so schreiben:

$$V = \alpha + \varrho P_1(\cos\vartheta)\beta + \varrho^2 P_2(\cos\vartheta)\gamma + \cdots \tag{2}$$

wo α, β, $\gamma \cdots$ von ϑ unabhängige Constante sind, nämlich

*) Bezeichnet ψ' den Winkel, den die auf dem Flächenelement nach innen errichtete Normale mit ϱ' bildet, und l' die Dichtigkeit, so ist $k' = \frac{l' \varrho'^2 \sin\vartheta'}{\cos\psi'}$, da ja das Element einer Kugelfläche mit dem Radius ϱ' gleich $\varrho'^2 \sin\vartheta' d\vartheta' d\varphi'$ ist.

$$\alpha = 2\pi \int_0^\pi d\vartheta' \sum \frac{k'}{\varrho'}$$

$$\beta = 2\pi \int_0^\pi d\vartheta' P_1 (\cos\vartheta') \sum \frac{k'}{\varrho'^2}$$

$$\gamma = 2\pi \int_0^\pi d\vartheta' P_2 (\cos\vartheta') \sum \frac{k'}{\varrho'^3}$$

u. s. f.

In den auf der Axe liegenden Punkten innerhalb jener Kugel, für welche $\vartheta = 0$ ist, hat V mithin den Werth

$$\alpha + \varrho\beta + \varrho^2\gamma + \cdots$$

Auf der Axe, oder wenigstens auf einem, wenn auch noch so kleinen, endlichen Stück der Axe, welches innerhalb der Kugel fällt, soll V constant sein; dies kann nur dann der Fall sein, wenn die Coefficienten β, $\gamma \cdots$ sämmtlich gleich Null sind. Folglich ist nach (2) für alle Punkte innerhalb der Kugel mit dem Radius r, $V = \alpha$, d. h. das Potential constant. Nun hat *Gauss* (*Allgemeine Lehrsätze in Beziehung u. s. w.* Art. 21.; *Gauss'* Werke, herausgegeben von der K. Ges. d. W. zu Göttingen, B. V. pag. 223) folgenden Satz bewiesen:

> „Das Potential V von Massen, die sämmtlich ausserhalb eines zusammenhängenden Raumes liegen, kann nicht in einem Theil dieses Raumes einen constanten Werth und zugleich in einem andern Theil desselben einen verschiedenen Werth haben."

Somit gilt jener constante Werth α für alle Punkte des von A eingeschlossenen Raumes.

[26]) Es ist nicht schwer, folgende Gleichungen zu verificiren:

$$p_n' = r_n' = b\, q_{n+1}$$

$$s_n = \frac{b}{a} q_n$$

$$s_n' = b p_n$$

$$r_n = \frac{q_n'}{a} \, .$$

Es genügt also, die Grössen p_n, q_n, q_n' für jedes n mit Hilfe der aufgestellten Gleichungen zu berechnen; daraus ergeben sich die übrigen Grössen p_n', r_n', s_n', s_n, r_n für jedes n durch Multiplication oder Division mit a oder b.

[27]) Für die numerische Berechnung der Dichtigkeit ist es von

Nutzen mit *Poisson* zu bemerken, dass die Glieder einer jeden der beiden unendlichen Reihen, für ein hinreichend grosses n, als Glieder einer geometrischen Reihe betrachtet und demgemäss summirt werden können. Statt der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n^2 - q_n^2}{(p_n^2 - 2p_n q_n \cos\vartheta + q_n^2)^{\frac{3}{2}}}$$

schreiben wir $\sum\limits_{n=0}^{m} + \sum\limits_{n=m+1}^{\infty}$. Nun waren die Grössen p_n und q_n von der Form

$$p_n = a\omega^n + a'\omega^{-n}$$

$$q_n = b\omega^n + b'\omega^{-n}.$$

Nehmen wir für ω die Wurzel, welche grösser als 1 ist, so wird ω^{-n} bald so klein werden, dass es gegen ω^n vernachlässigt werden kann, so dass wir haben

$$p_n = a\omega^n,\ q_n = b\omega^n.$$

Setzen wir diese Werthe ein in $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}$, so geht diese Summe über in

$$\frac{a^2 - b^2}{(a^2 - 2ab\cos\vartheta + b^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\omega^m} \left(\frac{1}{\omega} + \left(\frac{1}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{(a^2 - 2ab\cos\vartheta + b^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\omega^m(\omega - 1)}.$$

[28]) Dieser Satz ist bekannt unter dem Namen des *Dirichlet*'schen Princips.

[29]) Es bezeichne (α, β) wieder den Werth desjenigen u in irgend einem Punkt O eines schalenförmigen Raumes, welches an der einen Grenzfläche desselben den Werth α, an der anderen den Werth β annehmen soll. Behauptet wird, dass $(\alpha + \delta, \beta)$, in demselben Punkt O, grösser ist als (α, β), wenn δ in allen Punkten der ersten Grenzfläche einen positiven Werth hat. Nach dem Princip der Superposition ist nämlich

$$(\alpha + \delta, \beta) = (\alpha, \beta) + (\delta, 0).$$

Nach dem zweiten Princip liegt $(\delta, 0)$ in jedem Punkt O des Raumes zwischen den extremen Werthen des u an den beiden Grenzflächen; mithin ist $(\delta, 0)$ positiv, da der an der einen Grenzfläche stattfindende Werth δ überall positiv, der an der zweiten Grenzfläche stattfindende überall 0 ist. Folglich muss

$$(\alpha + \delta, \beta) > (\alpha, \beta)$$

sein. Ebenso zeigt man, dass

$$(\alpha - \delta, \beta) < (\alpha, \beta)$$

ist.

[30]) *Gauss: Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte.* Art. 31 bis 34. *Gauss'* Werke, B. V. *Dirichlet's* Beweis ist wesentlich von dem *Gauss*'schen verschieden.

[31]) *Gauss: Erdmagnetismus und Magnetometer. Gauss'* Werke, B. V. S. 320 und 321.

[32]) *Gauss: Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata.* Art. 5. *Gauss'* Werke. B. V.

[33]) *Gauss: Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus.* Art. 15. *Gauss'* Werke, B. V.

[34]) Da bei der Hypothese, dass die erdmagnetische Kraft ausschliesslich im Innern der Erde ihren Sitz habe, die Kenntniss des Werthes der nach Norden gerichteten Componente in allen Punkten der Erdoberfläche hinreichte, um den allgemeinen Ausdruck (3) von v für den ganzen unendlichen Raum ausserhalb der Erdoberfläche daraus abzuleiten, so kann man aus jener Kenntniss auch alle drei Componenten, nicht bloss auf der Erdoberfläche, sondern gleichfalls für den ganzen unendlichen Raum ausserhalb derselben ableiten. Der Uebersicht wegen stellen wir die vier Formeln für v, X, Y, Z zusammen. Ist auf der Erdoberfläche

$$-\int_0^\vartheta X\,d\vartheta = U_0 + T_1 + T_2 + \cdots,$$

wo sämmtliche Constanten der Kugelfunctionen $U_0, T_1, T_2 \cdots$ als bekannt anzusehen sind, so ist für irgend einen Punkt ausserhalb der Erdoberfläche

$$v = R\left(T_0 \frac{R}{\varrho} + T_1 \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 + T_2 \left(\frac{R}{\varrho}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$X = -\frac{1}{\varrho}\frac{dv}{d\vartheta} = -\left(\frac{R}{\varrho}\right)^3 \left(\frac{dT_1}{d\vartheta} + \frac{R}{\varrho}\frac{dT_2}{d\vartheta} + \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 \frac{dT_3}{d\vartheta} + \cdots\right)$$

$$Y = -\frac{1}{\varrho \sin\vartheta}\frac{dv}{d\varphi}$$

$$= -\left(\frac{R}{\varrho}\right)^3 \frac{1}{\sin\vartheta}\left(\frac{dT_1}{d\varphi} + \frac{R}{\varrho}\frac{dT_2}{d\varphi} + \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 \frac{dT_3}{d\varphi} + \cdots\right)$$

$$Z = -\frac{dv}{d\varrho} = \left(\frac{R}{\varrho}\right)^2\left(T_0 + 2\frac{R}{\varrho}T_1 + 3\left(\frac{R}{\varrho}\right)^2 T_2 + \cdots\right).$$

T_0 hat den Werth $\frac{V_0}{R} + U_0$, wo V_0 den Werth des V am Pol bezeichnet. Vgl. *Gauss* a. a. O. Art. 19. und 20.

[35]) *Gauss* findet (a. a. O. Art. 39. am Schluss), dass die nach der ersten Formel

$$Z = T_0 + 2T_1 + 3T_2 + \cdots,$$

wenn man darin $T_0 = 0$ setzt, berechneten Werthe von Z sehr gut mit den Beobachtungen übereinstimmen, während letztere mit der zweiten Formel

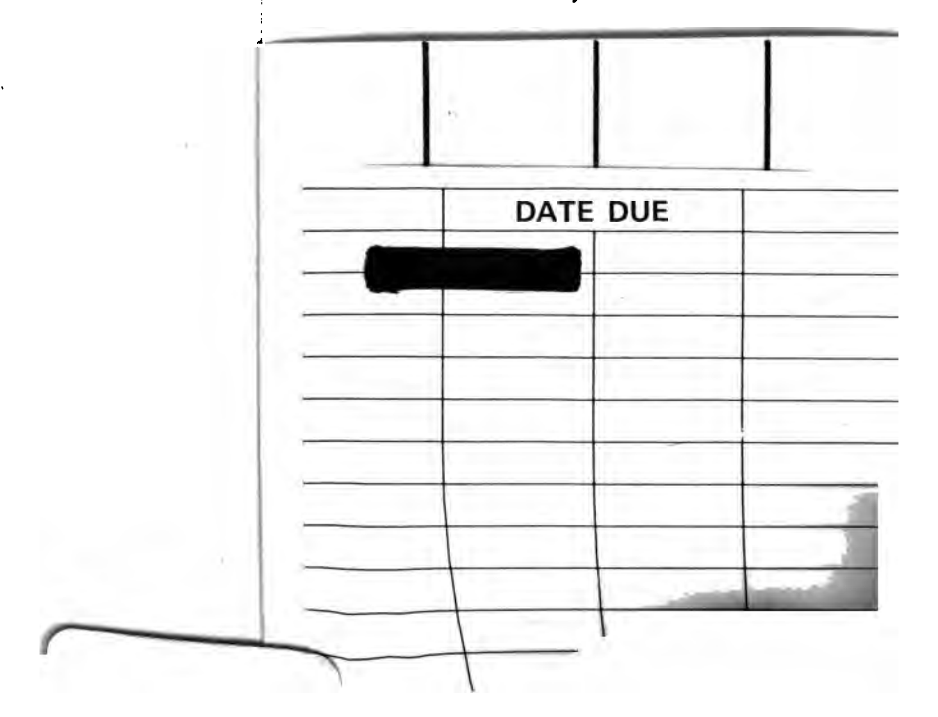
$$Z = -T_1 - 2T_2 - 3T_3 - \cdots$$

ganz und gar unverträglich sein würden; deshalb sei „die Unstatthaftigkeit der Hypothese, die die Ursache des Erdmagnetismus in den Raum ausserhalb der Erde stelle, als erwiesen anzusehen". Zu Anfang des Art. 40. heisst es: „Indess darf hiemit die Möglichkeit, dass ein *Theil* der erdmagnetischen Kraft, wenn auch nur ein vergleichungsweise sehr kleiner, von oben her erzeugt werde, noch nicht als entschieden widerlegt betrachtet werden".

Der Inhalt unseres folgenden Paragraphen 45. findet sich in diesem Artikel 40.




MATH-COMP. SCI. LIB.
Stanford University Libraries
3 6105 002 062 003


STANFORD UNIVERSITY LIBRARY
Stanford, California
DATE DUE

